1 Interpolación

1.1 Interpolacion de Lagrange

Suponga los $n+1$ puntos

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array}$$

el polinomio de orden n que interpola los puntos

$$g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n$$

o bien

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Example 1 *Obtener un polinomio que interpole los puntos*

n	0	1	2	3
x	2	7.5	14	19
y	5.5	10	-7	1.2

solución:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{3} y_k \prod_{j \neq k}^{3} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \\ &= y_0 \prod_{j \neq 0}^{3} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{j \neq 1}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \\ &\quad + y_2 \prod_{j \neq 2}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} + y_3 \prod_{j \neq 3}^{3} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} \end{aligned}$$

para el primero

$$-4.9020 \times 10^{-3} x^3 + 0.19853 x^2 - 2.5172 x + 9.7794$$

para el segundo termino

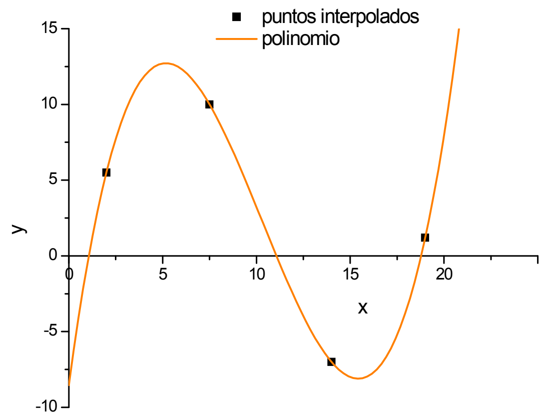
$$\begin{aligned} y_1 \prod_{j \neq 1}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} &= y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &= 10 \frac{(x - 2)(x - 14)(x - 19)}{(7.5 - 2)(7.5 - 14)(7.5 - 19)} \\ &= 2.4324 \times 10^{-2} x^3 - 0.85132 x^2 + 8.0754 x - 12.94 \end{aligned}$$

tercero

$$1.7949 \times 10^{-2} x^3 - 0.51154 x^2 + 3.5090 x - 5.1154$$

cuarto

$$1.2276 \times 10^{-3}x^3 - 2.8849 \times 10^{-2}x^2 + 0.18169x - 0.2578$$



el polinomio de interpolacion

$$g(x) = 3.8599 \times 10^{-2}x^3 - 1.1932x^2 + 9.2489x - 8.5338$$

Tarea.

1. Las densidades (y) del sodio para tres temperaturas (x) están dadas

n	0	1	2
x	94	205	371
y	929	902	860

donde la densidad está en kg/m^3 y la temperatura en $°C$.

1. (a) Obtener el polinomio $g(x)$ de grado 2 que interpola estos puntos (método de Lagrange.)

   (b) Determine la densidad para la temperatura de $251°C$ empleando $g(x)$.

   (c) Grafique en origin tanto puntos como polinomio.

2. Obtener un polinomio $g(x)$ de grado 3 que interpole los puntos

n	0	1	2	3
x	-8	-1	4.3	10.4
y	3.45	6.8	-0.67	-7.92

¿Qué valor y le corresponderá a la abscisa $x = 7$? Grafique en origin puntos y polinomio.

1.2 Interpolación de Newton

Para el desarrollo de tabla de diferencias (hacia adelante)

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y_{i+k-j} \qquad\qquad k = 0, ..., n$$

Suponga los $n+1$ puntos donde las abscisas estan igualmente espaciadas

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array}$$

esto es $x_j = x_0 + jh$. El polinomio de orden n que interpola los puntos por el método de Newton

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y_{k-j}$$

donde $t = (x - x_0)/h$ y el coeficiente binomial se define

$$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

es decir

$$\begin{aligned} \binom{t}{0} &= 1 \\ \binom{t}{1} &= t \\ \binom{t}{2} &= \frac{1}{2} t(t-1) \\ \binom{t}{3} &= \frac{1}{6} t(t-1)(t-2) \end{aligned}$$

Example 2 *Por el método de Newton obtener un polinomio que interpole los puntos*

n	0	1	2	3
x	1	3	5	7
y	-3	1	10	4

solución:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{t}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y_{k-j} \\ &= \binom{t}{0} \sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{0}{j} y_{0-j} + \binom{t}{1} \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \binom{1}{j} y_{1-j} \\ &\quad + \binom{t}{2} \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} y_{2-j} + \binom{t}{3} \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \binom{3}{j} y_{3-j} \end{aligned}$$

primero

$$y_0 = -3$$

segundo

$$t\,(y_1 - y_0) = (3+1)t = 4 * t$$

desarrollando el tercer término

$$\binom{t}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}y_{2-j} = \frac{t!}{2!(t-2)!}((-1)^0\binom{2}{0}y_{2-0} + (-1)^1\binom{2}{1}y_{2-1} + (-1)^2\binom{2}{2}y_{2-2})$$

$$= \quad \frac{t(t-1)}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0) = \frac{t(t-1)}{2}(10 - 2(1) - 3) = 5 * \frac{t(t-1)}{2}$$

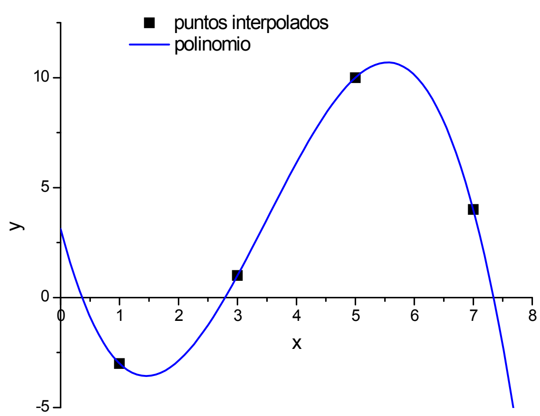
cuarto

$$\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) = -20 * \frac{1}{6}t(t-1)(t-2)$$

polinomio

$$\begin{aligned} g(t) &= c_0 + c_1 t + c_3\frac{1}{2}t(t-1) + c_4\frac{1}{6}t(t-1)(t-2) \\ &= -\frac{10}{3}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - \frac{31}{6}t - 3 \end{aligned}$$

donde $c_0 = -3,\ c_1 = 4,\ c_3 = 5,\ c_4 = -20.$



o bien

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{10}{3h^3}(x-x_0)^3 + \frac{25}{2h^2}(x-x_0)^2 - \frac{31}{6h}(x-x_0) - 3 \\ &= -\frac{10}{24}(x-1)^3 + \frac{25}{8}(x-1)^2 - \frac{31}{12}(x-1) - 3 \end{aligned}$$

donde $h = 2$.

Tarea.

1. Aplicando el método de Newton, obtener el polinomio que interpola los siguientes puntos

n	0	1	2	3	4	5
x	-1.5	-0.8	-0.1	0.6	1.3	2.0
y	-6.7	-4.5	3.4	11.3	0.2	-9.8

¿para $x = 0.5$ qué valor de y corresponde? Graficar en origin. (Captura el programa en C para obtener los coeficientes $c[n]$ del polinomio

$$\begin{aligned} g(t) &= c[5]\frac{1}{120}t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + c[4]\frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(t-3) + \\ &\quad c[3]\frac{1}{6}t(t-1)(t-2) + c[2]\frac{1}{2}t(t-1) + c[1]t + c[0] \end{aligned}$$

cuya imagen está junto a este archivo. Recuerda hacer el cambio de variable $t = (x - x_0)/h$ antes de graficar ($x_0 = -1.5,\ h = 0.7$).