1 Unidad 3. Integración numérica

1.1 Regla del trapecio

Considere la función continua y derivable en el intervalo (a, b)

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

donde $h = b - a$.

Example 1 *Integrar por el método del trapecio*

$$\int_1^3 (3x^2 - 1)dx$$

solución:
$h = 3 - 1 = 2$
$f(1) = 2$
$f(3) = 26$

$$A \approx \frac{2}{2}(26 + 2) = 28$$

Si comparamos con el valor exacto $A = 24$ *la aproximación tiene un error del* 16.6 %.

Para una partición de n trapecios con altura h

$$\begin{aligned} A &\approx \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(a+h)) + \frac{h}{2}(f(a+h) + f(a+2h)) \\ &+ ... + \frac{h}{2}(f(a + (n-1)h) + f(b)) \end{aligned}$$

o bien

$$A \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh)) \qquad \text{(Trapecio)}$$

Example 2 *Integrar por el método del trapecio con una partición de* $n = 5,\ 10,\ 15$

$$\int_1^3 (3x^2 - 1)dx$$

solución ($n = 5$*)*
$h = \frac{3-1}{5} = 0.4$
$f(1) = 2$
$f(3) = 3(3)^2 - 1 = 26.0$
$f(1 + 0.4j) = 3(1 + 0.4j)^2 - 1$

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{0.4}{2}(26 + 2 + 2\sum_{j=1}^{5-1}(3(1 + 0.4j)^2 - 1)) \\ &= 24.16 \end{aligned}$$

Si comparamos con el valor exacto la aproximación tiene un error del 0.6 %.
Para las particiones de $n = 10,\ 15$

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{0.2}{2}(26 + 2 + 2\sum_{j=1}^{10-1}(3(1+0.2j)^2 - 1)) = 24.04 \qquad\qquad h = 0.2 \\
A &\approx \frac{0.133\,3}{2}(26 + 2 + 2\sum_{j=1}^{15-1}(3(1+0.133\,3j)^2 - 1)) = 24.005 \qquad\qquad h = 0.133\,33
\end{aligned}
$$

Tarea. Elaborar un programa en c para integrar por el método del trapecio lo siguiente

1. $\int_{0.5}^{2} \frac{e^{2x}}{x} dx = 17.736 \qquad\qquad n = 10,\ 20$
2. $\int_{5}^{10} -9x^{-1} \sin(\frac{1}{2}x + 1) dx = 4.715\,7 \qquad\qquad n = 100$

1.2 Regla de Simpson 1/3

Considere la aproximación

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado 2 que interpola los puntos

$$\begin{array}{lll} x_0 = a & x_1 & x_2 = b \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$$

sabemos que

$$g(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= y_0 \\ \beta &= -\frac{3}{2}y_0 + 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ \gamma &= \frac{1}{2}y_0 - y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ h &= (b-a)/2 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = (x - x_0)/h$ e integrando

$$h\int_0^2 g(t)dt = h(2\alpha + 2\beta + \frac{8}{3}\gamma)$$

o bien

$$A \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Example 3 *Aproximar la integral por el método de Simpson 1/3*

$$\int_{2.3}^{4.5} \ln 2x dx = 4.1776$$

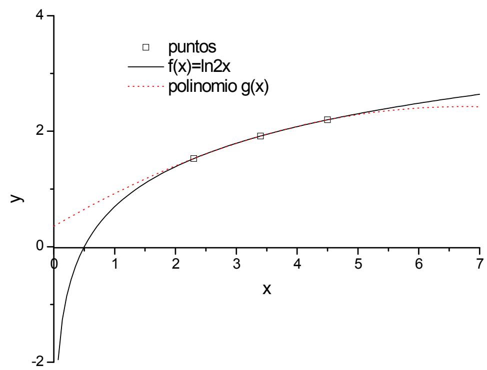
puntos

n	0	1	2
x	$a = 2.3$	3.4	$b = 4.5$
y	1.5261	1.9169	2.1972

por lo que

$$A \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = 4.1767$$

donde $h = 1.1$



Aplicando el método n veces para una partición de $2n$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= \frac{h}{3}(f(a) - f(b) + \sum_{k=1}^{n}(4f(x_{2k-1}) + 2f(x_{2k}))) \end{aligned}$$

pero $x_{2k-1} = a + (2k-1)h,\ x_{2k} = a + 2kh$, donde $h = (b-a)/2n$

$$A \approx \frac{h}{3}(f(a) - f(b) + \sum_{k=1}^{n}(4f(a + (2k-1)h) + 2f(a + 2kh))) \quad \text{(Simpson 1/3)}$$

Example 4 *Integrar por Simpson 1/3 empleando* $n = 2, 5$

$$\int_2^6 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} dx$$

para $n = 2$

a=	2	
b=	6	
n=	2	
h=	1	
f(x)=	exp(0.5x)/x	
A=	8.04094635	
k	f(a+(2k-1)h)	f(a+2kh)
1	1.49389636	1.84726402
2	2.43649879	3.34758949
suma	3.93039515	5.19485351

$para\ n = 5$

a=	2	
b=	6	
n=	5	
h=	0.4	
f(x)=	exp(0.5x)/x	
A=	8.03878508	
k	f(a+(2k-1)h)	f(a+2kh)
1	1.38338205	1.4482857
2	1.54782263	1.68045763
3	1.84726402	2.05113943
4	2.29649508	2.58918039
5	2.93654407	3.34758949
suma	10.0115079	11.1166526

1.3 Regla de Simpson 3/8

Considere la aproximación

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado 3 que interpola los puntos

$$\begin{array}{llll} x_0 = a & x_1 & x_2 & x_3 = b \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

sabemos que

$$g(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= y_0 \\ \beta &= -\frac{11}{6}y_0 + 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ \gamma &= y_0 - \frac{5}{2}y_1 + 2y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ \delta &= -\frac{1}{6}y_0 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ h &= (b-a)/3 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = (x - x_0)/h$ e integrando

$$h\int_0^3 g(t)dt = h\left(3\alpha + \frac{9}{2}\beta + 9\gamma + \frac{81}{4}\delta\right)$$

o bien

$$A \approx \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

Aplicando el método n veces para una partición de $3n$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \cdots + \frac{3}{8}h(y_{3n-3} + 3y_{3n-2} + 3y_{3n-1} + y_{3n}) \\ &= \frac{3}{8}h(f(a) - f(b) + 3\sum_{k=1}^{3n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{3k})) \end{aligned}$$

pero $x_k = a + kh,\ x_{3k} = a + 3kh$, donde $h = (b-a)/3n$

$$A \approx \frac{3}{8}h(f(a) - f(b) + 3\sum_{k=1}^{3n} f(a+kh) - \sum_{k=1}^{n} f(a+3kh)) \qquad \text{(Simpson 3/8)}$$

Example 5 *Integrar por Simpson 3/8 empleando* $n = 3, 6$

$$\int_{0.5}^{6.2} \frac{8\sin x/3}{x^2}dx$$

a=	0.5	
b=	6.2	
n=	3	
h=	0.633333333	
f(x)=	8*sin(x/3)/x^2	
A=	5.965921067	
k	f(a+kh)	f(a+3kh)
1	2.297372114	0.9963279
2	1.42369148	0.42858489
3	0.996327904	0.18304993
4	0.736799952	
5	0.55925595	
6	0.428584892	
7	0.327816027	
8	0.247769769	
9	0.183049935	
suma	7.200668024	1.60796273

a=	0.5	
b=	6.2	
n=	6	
h=	0.31666667	
f(x)=	8*sin(x/3)/x^2	
A=	5.88003699	
k	f(a+kh)	f(a+3kh)
1	3.22512607	1.76830727
2	2.29737211	0.9963279
3	1.76830727	0.64060106
4	1.42369148	0.42858489
5	1.17957177	0.28560136
6	0.9963279	0.18304993
7	0.85283315	
8	0.73679995	
9	0.64060106	
10	0.55925595	
11	0.48937767	
12	0.42858489	
13	0.37515595	
14	0.32781603	
15	0.28560136	
16	0.24776977	
17	0.21374004	
18	0.18304993	
suma	16.2309824	4.30247242

Tarea.

1. Elaborar un programa en c para integrar por el método de Simpson1/3

$$\int_1^5 \frac{8\sin x/3}{x^2}dx \qquad n = 8, 15$$

2. Elaborar un programa en c para integrar por el método de Simpson3/8

$$\int_8^{12.5} \frac{\cos 0.6x}{x^{\frac{1}{2}}}dx \qquad n = 5, 12$$