1 Unidad 1. Operaciones matriciales

Resultado de aprendizaje. Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación por escalar, entre matrices y transposición.

Definition 1 *Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de números reales (o complejos) ordenados en m filas y n columnas*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} \end{bmatrix}$$

a_{ij} se denomina entrada o elemento (i, j). Si $m = n$ estonces A es cuadrada de orden n y a los elementos a_{ii} forman la diagonal principal.

Example 2

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 & 8 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 5 & -2 \\ 4 & \frac{7}{3} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz de 3×4*, donde* $a_{24} = -2,\ a_{31} = 4$.

Example 3

$$B = \begin{bmatrix} 2i & 4 & 0 \\ -i & 0 & i \\ 5 & 4i & -3 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3 *donde* $a_{13} = 0,\ a_{31} = 5$.

A las matrices $m \times 1$ y $1 \times n$ se les denomina **vectores** columna y fila respectivamente.

Example 4

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 7 \\ i \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 4 & -5 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1 Operaciones entre matrices

1.1.1 Suma

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de $m \times n$. Se define

$$C = A + B$$

donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Example 5 *Sean*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{6} & 7 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 5 & 2 \\ -\frac{2}{5} & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Example 6 *la suma resulta*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 12 & \frac{3}{4} & -4 \\ \frac{23}{6} & -1 & 5 & 8 \\ \frac{18}{5} & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma

- $A + B = B + A$ (conmutatividad)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociatividad)
- $A + O = A$ (elemento neutro)
- $A - A = O$ (inverso aditivo)

1.1.2 Multiplicación escalar

Sea $A = [a_{ij}]$ y $r \in \mathbb{R}$. Se define el producto escalar

$$B = rA$$

donde $b_{ij} = ra_{ij}$.

Example 7 *Sean*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{6} & 7 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 5 & 2 \\ -\frac{2}{5} & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

el producto escalar resulta

$$A - \frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -4 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{17}{6} & \frac{37}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{64}{15} & -\frac{22}{3} & \frac{11}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.3 Multiplicación matricial

Sean $A = [a_{ij}]$ de $m \times p$ y $B = [b_{ij}]$ de $p \times n$ matrices. Se define

$$C = AB$$

matriz de $m \times n$ donde $c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$.

Example 8 *Sean*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 7 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \\ -\frac{2}{5} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

el producto matricial resulta

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (-2)(3) + (5)(4) + (\frac{3}{4})(-\frac{2}{5}) & (-2)(7) + (5)(-8) + (\frac{3}{4})(2) \\ (-\frac{1}{6})(3) + (7)(4) + (0)(-\frac{2}{5}) & (-\frac{1}{6})(7) + (7)(-8) + (0)(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{137}{10} & -\frac{105}{2} \\ \frac{55}{2} & -\frac{343}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \\ -\frac{2}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 7 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{43}{6} & 64 & \frac{9}{4} \\ -\frac{20}{3} & -36 & 3 \\ \frac{7}{15} & 12 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remark 9 *El producto matricial, en general,* ***no*** *es conmutativo.*

Propiedades de la multiplicación matricial

- $A(BC) = (AB)C$ (asociatividad)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva)
- $(A + B)C = AC + BC$
- $I_n A = A I_m = A$ (elemento neutro)

donde a la matriz cuadrada I se le denomina matriz identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando la multiplicación matricial se define entre vectores, la operación se denomina **producto escalar** o **producto punto.** La potencia de una matriz se define

$$A^p = \underbrace{AA \cdots A}_{p \text{ factores}}$$

definimos también

$$A^0 = I$$

Example 10 *Sean*

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} 9 & -5 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$a \cdot b = (9)(3) + (-5)(-4) + (\frac{2}{3})(1) = \frac{143}{3}$$

1.1.4 Transposición

Sean $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$. La matriz $A^T = [a_{ji}]$ de $n \times m$ se denomina transpuesta de A

Example 11 *Sean*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 7 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \\ -\frac{2}{5} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la transposición resulta

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{6} \\ 5 & 7 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \\ B^T &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -\frac{2}{5} \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propiedades de la transposición

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(rA)^T = rA^T$

Example 12 *Sean*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se verifica la propiedad $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 51 & -15 \\ -26 & 19 \end{bmatrix}$$

2 Unidad 2. Matriz inversa

Resultado de aprendizaje. Calcular la inversa de una matriz por los métodos de la matriz adjunta y eliminación gaussiana.

Definition 13 *Sea* $S = \{1, 2, ..., n\}$ *El número de permutaciones existentes es* $n!$

Example 14 *Determinar las permutaciones de* $S = \{1, 2, 3\}$

Definition 15 *El simbolo de Levi-Civita se define*

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk...} &= 1 \text{ permutación par} \\ &= -1 \text{ permutación impar} \\ &= 0 \text{ indices repetidos} \end{aligned}$$

Definition 16 *Sean* A *matriz cuadrada de* $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots \end{bmatrix}$$

El determinante de A *se define*

$$\det A = |A| = \sum \epsilon_{ijk...} a_i b_j c_k ...$$

Example 17 *Determinar* $\det A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$

Propiedades de los determinantes

i) $\det A = \det A^T$

ii) Si A se obtiene permuando dos filas (o dos columnas) de B entonces

$$\det A = -\det B$$

iii) Si A tiene dos filas (o dos columnas) iguales

$$\det A = 0$$

iv) Si A tiene dos filas (o dos columnas) con sólo ceros

$$\det A = 0$$

Determinate por desarrollo de cofactores

Definición. Sea A una matriz de $n \times n$. Sea M_{ij} la submatriz de A de tamaño $(n-1)(n-1)$, obtenida eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El determinante $\det(M_{ij})$ se denomina menor de A. El cofactor A_{ij} se define

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Teorema. Sea A una matriz de $n \times n$. El determinante de A desarrollado por cofactores a lo largo de la i-ésima fila

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

determinante de A desarrollado por cofactores a lo largo de la j-ésima columna

$$\det A = \sum_i a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular los menores $\det M_{23}, \det M_{14}, \det M_{33}$

$$\begin{aligned} \det M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -219 \\ \det M_{14} &= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -5 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -244 \\ \det M_{14} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -460 \end{aligned}$$

y los cofactores correspondientes A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 69$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 219$$
$$A_{24} = (-1)^{2+4} \det M_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -312$$

$$\det A = (-1)(69) + (4)(-5) + (7)(219) + (8)(-312)$$

$(-1)(69) + (4)(-5) + (7)(219) + (8)(-312) = -1052$

corroboración

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

3 Unidad 3. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Gauss

Resolver el sistema de ecuaciones por eliminación gaussiana

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 && \text{(2 pivote)} \\ 3x + 4y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}R_1$

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= \frac{1}{2} \\ 3x + 4y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

$-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
$-4R_1 + R_2 \rightarrow R_3$

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= \frac{1}{2} && (\tfrac{11}{2} \text{ pivote}) \\ \frac{11}{2}y - \frac{11}{2}z &= -\frac{3}{2} \\ 4y - 5z &= -3 \end{aligned}$$

$\frac{2}{11}R_2$

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= \frac{1}{2} \\ y - z &= -\frac{3}{11} \\ 4y - 5z &= -3 \end{aligned}$$

$-4R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= \frac{1}{2} \\ y - z &= -\frac{3}{11} \\ -z &= -\frac{21}{11} \end{aligned}$$

$-R_3$

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= \frac{1}{2} \\ y - z &= -\frac{3}{11} \\ z &= \frac{21}{11} \end{aligned}$$

, Solution is: $\left[x = -\frac{17}{11}, y = \frac{18}{11}, z = \frac{21}{11}\right]$

Estas operaciones pueden simplificarse utilizando la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obteniendo la matriz escalonada

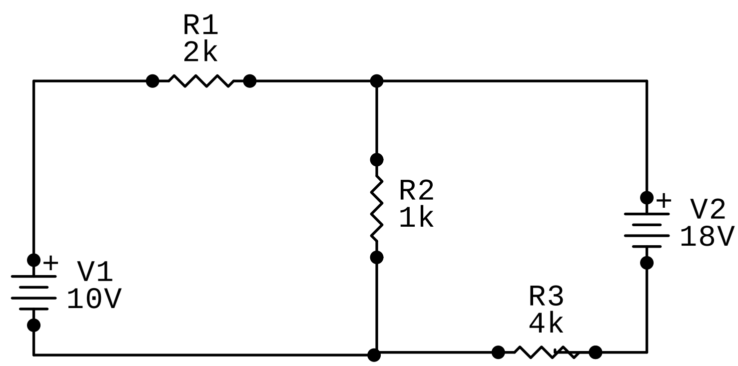
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{11} \end{bmatrix}$$

3.2 Gauss-Jordan

$\frac{1}{2}R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{11} \end{bmatrix} \qquad \text{(Pivote } a_{22} = 1\text{)}$$

$R_3 + R_2 \rightarrow R_2$
$-R_3 + R_1 \rightarrow R_1$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{11} \end{bmatrix} \qquad \text{(Pivote } a_{22} = 1\text{)}$$

Solution is: $\left[x = -\frac{17}{11}, y = \frac{18}{11}, z = \frac{21}{11}\right]$

Exercise 18 *Resolver el siguiente sistema lineal ($T = 0, 1, ...9$ es la terminación del número de lista)*

$$\begin{aligned} 3x - 7y - Tz + 2w &= 3 \\ Tx + 2y + 3z - w &= -1 \\ 2x - 4y + z + Tw &= 0 \\ -5x + 3y - 2z - 3w &= T \end{aligned}$$

Aplicaciones (leyes de Kirchoff)
Resolver el siguiente circuito DC
Nota. Falta invertir polaridad de V_2 en diagrama
ecuación de nodos

$$i_1 = i_2 + i_3$$

malla 1

$$V_1 - i_1R_1 - i_3R_2 = 0$$

malla 2

$$-V_2 - i_3R_2 + i_2R_3 = 0$$

O bien

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ 2i_1 + i_3 &= 10 \\ 4i_2 - i_3 &= 18 \end{aligned}$$

4 U4. Espacios vectoriales

Operaciones entre vectores
Espacios vectoriales
Números complejos
Eigenvalores y eigenvectores

4.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

A las matrices $m \times 1$ y $1 \times n$ se les denomina **vectores** columna y fila respectivamente.

Example 19

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El conjunto de todos los vectores con n componentes o coordenadas (entradas o elementos de la matriz) se le denomina $n - espacio$ denotado por $\mathbb{R}^n$.

Propiedades de los vectores. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ and $j, k \in \mathbb{R}$.

i $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii $u + 0 = u$

iii $u + (-u) = 0$

iv $u + v = v + u$

v $k(u + v) = ku + kv$

vi $(j + k)u = ju + ku$

vii $(jk)u = j(ku)$

viii $1u = u$

Si $u = kv$, entonces u se denomina multiplo de v y viceversa.

4.2 Representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

vectores y operación entre ellos.

Definition 20 *Un vector v es una combinación lineal de vectores u_i si existen $k_i \in \mathbb{R}$ tales que*

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + ... + k_n u_n$$

Example 21 *Sean*

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ -20 \\ \frac{49}{2} \end{pmatrix}$$

si v es una combinación lineal de u_1, u_2, u_3, entonces $k_1 = -2, k_2 = 4, k_3 = \frac{1}{2}$, es decir

$$-2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ -20 \\ \frac{49}{2} \end{pmatrix}$$

Definition 22 *Los vectores u_i son linealmente dependientes si existen $k_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que*

$$k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n = 0$$

en caso contrario se dicen linealmente independientes.

Producto escalar.

Sean u, v vectores en $\mathbb{R}^n$. El producto escalar o interno se define

$$u \cdot v = \sum_j u_j v_j$$

propiedades del producto escalar

i $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

ii $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

iii $u \cdot v = v \cdot u$

vi $u \cdot u \geq 0$

El espacio $\mathbb{R}^n$ con con todas las propiedades anteriores se denomina espacio euclídeo.

Norma de un vector.

Sea $u \in \mathbb{R}^n$. La norma (magnitud o longitud) del vector se define

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_j u_j^2}$$

Vector unitario. Aquel que tiene norma unitaria.

Sea $u \in \mathbb{R}^n$. El vector unitario correspondiente

$$\widehat{u} = \frac{u}{\|u\|}$$

Desigualdad de Cauchy-Shwarz

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Desigualdad del triángulo (o de Minkowski)

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Distancia entre dos vectores

$$d = \|u - v\|$$

ángulo entre dos vectores

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

la proyección de u sobre v

$$u \cdot \widehat{v}$$

5 Unidad 5.Transformaciones lineales

5.1 Eigenvalores y eigenvectores

Definition 23 *Sea A una matriz de $n \times n$. El número λ es un eigenvalor de A si existe un eigenvector $\mathbf{r}$ distinto de cero en R^n tal que*

$$A\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$$

o bien

$$(A{-}\lambda I)\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Example 24 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

el eigenvalor y eigenvector correspondiente

$$\lambda = 3 \qquad\qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

satisfacen la ecuación $A\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, ya que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 25 *Los eigenvalores de A son las raíces del polinomio característico*

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

Example 26 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ecuación secular

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

eigenvalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\mathbf{r}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2 - x_1 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_1 &= 0 \end{aligned}$$

haciendo $x_2 = 1$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigenvector correspondiente a $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\mathbf{r}_2 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2 - 2x_1 &= 0 \\ x_2 - 2x_1 &= 0 \end{aligned}$$

haciendo $x_2 = 2$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Example 27 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ecuación secular

Example 28

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3 \\ &= (3-\lambda)\left(\lambda^2+1\right) = 0 \end{aligned}$$

eigenvalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= i \\ \lambda_3 &= -i \end{aligned}$$

eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0-3 & 0 & 3 \\ 1 & 0-3 & -1 \\ 0 & 1 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 3x_3 - 3x_1 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

haciendo $x_3 = 1$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigenvector correspondiente a $\lambda_2 = i$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0-i & 0 & 3 \\ 1 & 0-i & -1 \\ 0 & 1 & 3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 3x_3 - ix_1 &= 0 \\ x_1 - ix_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + (3-i)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

as dos primeras son independientes. Haciendo $x_3 = 1$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -3i \\ -3+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigenvector correspondiente a $\lambda_3 = -i$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0+i & 0 & 3 \\ 1 & 0+i & -1 \\ 0 & 1 & 3+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ ix_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + (3+i)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

las dos primeras son independientes. Haciendo $x_3 = 1$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 3i \\ -3-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 29

En los ejercicios 8 a 15, determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de cada matriz.

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16. Determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios asociados de cada una de las matrices siguientes.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2-i & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

17. Determine todos los valores propios y los vectores propios asociados de cada una de las matrices siguientes.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$