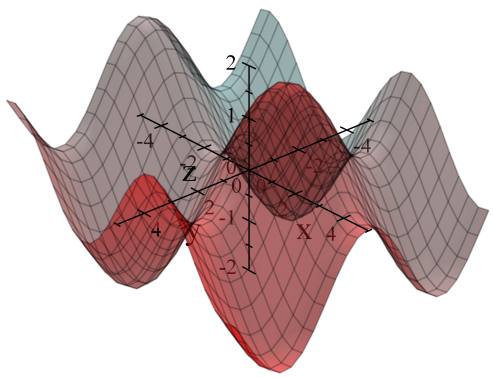
1 Unidad I. Funciones de varias variables

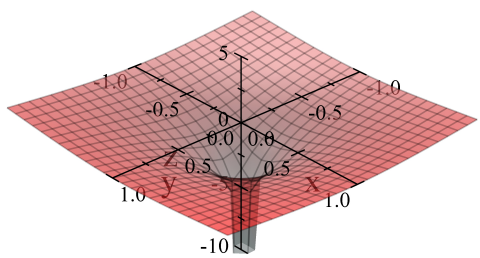
Definition 1 *Cualquier función f que tenga como dominio $\mathbb{R}^n$ y contradominio $\mathbb{R}$ se denomina* ***función de varias variables.*** *El número de variables lo determina n.*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Example 2 *La siguientes graficas corresponden a funciones en dos variables (x, y)*

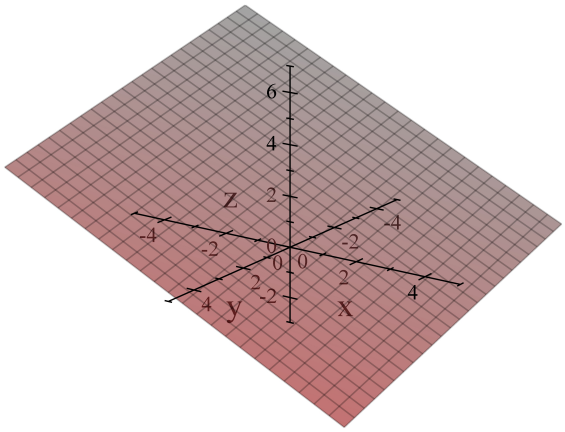


$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$



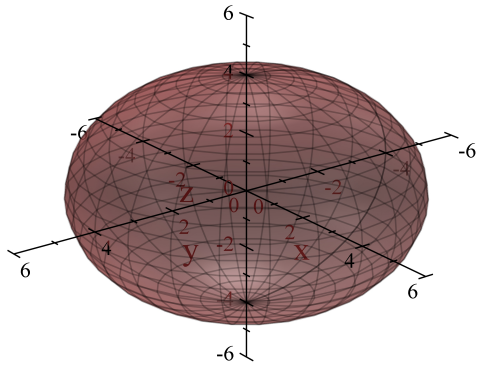
$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Example 3 *La ecuación del plano* $-2x - 4y - 6z + 12 = 0$



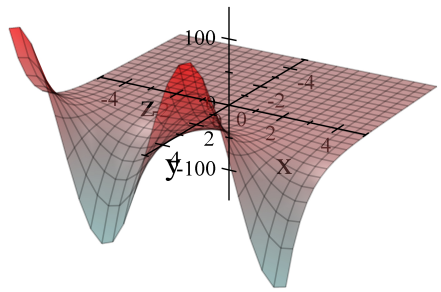
$$f(x, y) = 2 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}x$$

Example 4 *La ecuación de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ *de radio* 4

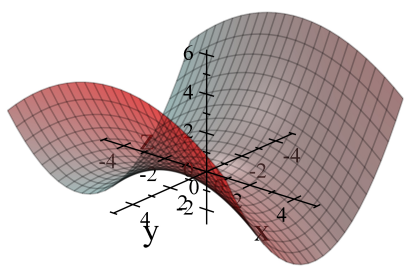


$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ g(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Example 5 *La función* $f(x,y) = \sin y e^x$

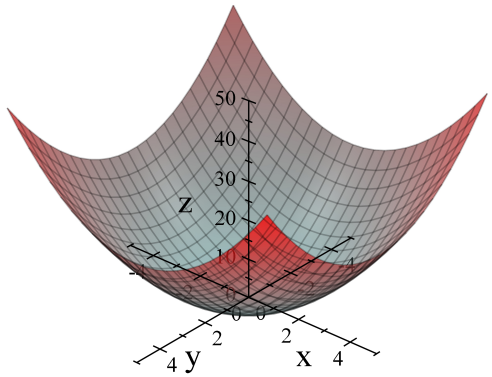


Example 6 *La función* $f(x,y) = (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2$



Paraboloide hiperbólico o la silla de montar

Example 7 *La función* $f(x, y) = x^2 + y^2$

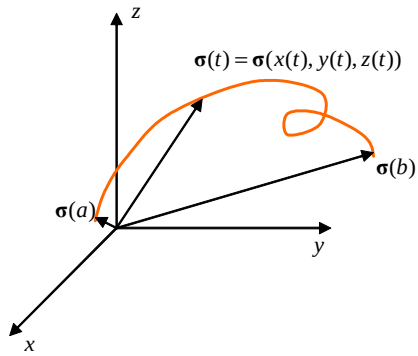


Paraboloide

Remark 8 *Las funciones de* 3 *variables (o más) requieren* 4 *dimensiones (o más) para ser graficadas. ¿Cómo graficarías una función en* 4 *dimensiones? ¡Imposible!*

2 Unidad 2. Funciones vectoriales

Una *trayectoria* en $\mathbf{R}^n$ es una función $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{\sigma}$ es diferenciable, decimos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una *trayectoria diferenciable*. Los puntos $\boldsymbol{\sigma}(t = a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t = b)$ se denominan *extremos de la trayectoria*. La *imagen* de $\boldsymbol{\sigma}$ se llama *curva de* σ.



1. Considerando la trayectoria como un punto en movimiento, la *derivada* de la trayectoria describiría la *velocidad* del punto al instante t

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}(x'(t), y'(y), z'(t))$$

Análogamente, la derivada de la velocidad describiría la *aceleración* que padece el punto al instante t

$$\boldsymbol{\sigma}''(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}'(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}(x''(t), y''(y), z''(t))$$

Example 9 *Considere la trayectoria* $\boldsymbol{\sigma}(t) = \cos t\widehat{\mathbf{i}} + \sin t\widehat{\mathbf{j}}$. *Obtener la velocidad* $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ *y la aceleración* $\boldsymbol{\sigma}''(t)$ *en* $t = \frac{\pi}{4}$. *Grafique.*

velocidad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'(t) &= -\sin t\widehat{\mathbf{i}} + \cos t\widehat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\sigma}'(\frac{\pi}{4}) &= -\sin \frac{\pi}{4}\widehat{\mathbf{i}} + \cos \frac{\pi}{4}\widehat{\mathbf{j}} = -0.707\,11\widehat{\mathbf{i}} + 0.707\,11\widehat{\mathbf{j}} = \end{aligned}$$

aceleración

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}''(t) &= -\cos t\widehat{\mathbf{i}} - \sin t\widehat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\sigma}'(\frac{\pi}{4}) &= -\cos \frac{\pi}{4}\widehat{\mathbf{i}} - \sin \frac{\pi}{4}\widehat{\mathbf{j}} = -0.707\,11\widehat{\mathbf{i}} - 0.707\,11\widehat{\mathbf{j}} = \end{aligned}$$

Example 10 *Considere la trayectoria* $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\widehat{\mathbf{i}} + t^2\widehat{\mathbf{j}}$. *Obtener la velocidad* $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ *y la aceleración* $\boldsymbol{\sigma}''(t)$ *en* $t = 2$. *Grafique.*

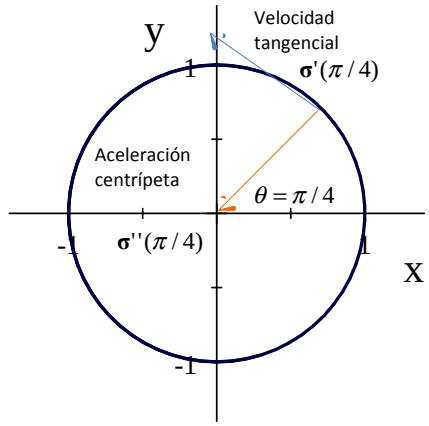
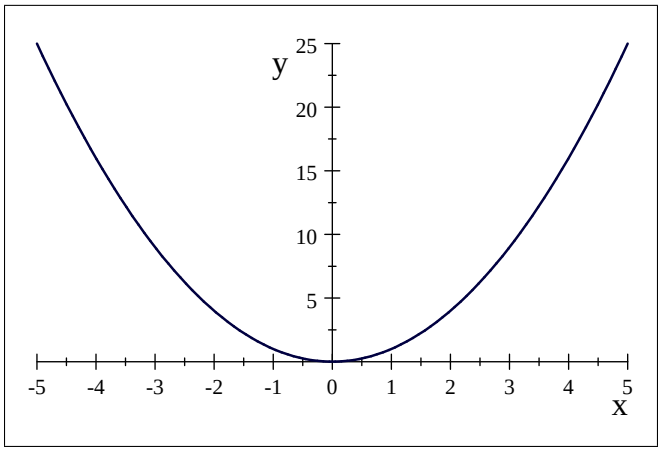


Figure 1: Trayectoria circular de radio 1



Tratectoria parabólica

velocidad

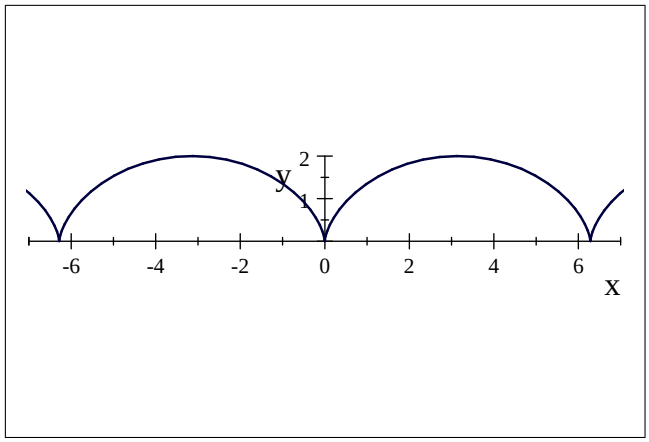
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'(t) &= \widehat{\mathbf{i}} + 2t\widehat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\sigma}'(2) &= \widehat{\mathbf{i}} + 4\widehat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

aceleración

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}''(t) &= 2\widehat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\sigma}''(2) &= 2\widehat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

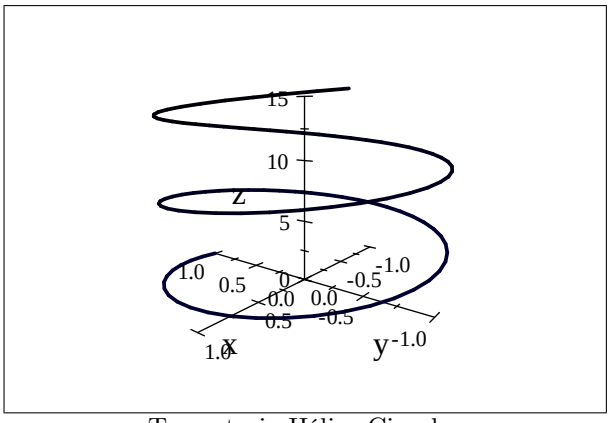
Tarea. Obten la velocidad y aceleración de las siguientes trayectorias al t indicado.

1. La trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t - \sin t)\widehat{\mathbf{i}} + (1 - \cos t)\widehat{\mathbf{j}}$ describe la posición de un punto sobre un circulo ($r = 1$) en rodamiento. Obtener la velocidad $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ y la aceleración $\boldsymbol{\sigma}''(t)$ en $t = \frac{3\pi}{4}$. La curva se denomina cicloide.



Trayectoria Cicloide

2. Considere la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = \cos t\widehat{\mathbf{i}} + \sin t\widehat{\mathbf{j}} + t\widehat{\mathbf{k}}$ denominada "hélice circular". Obtener la velocidad $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ y la aceleración $\boldsymbol{\sigma}''(t)$ en $t = \frac{9\pi}{4}$. Grafique



Trayectoria Hélice Circular

2.1 Longitud de arco

Sea $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria. La longitud de $\boldsymbol{\sigma}$ está definida como

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_a^b |\boldsymbol{\sigma}'(t)|\, dt$$

Example 11 *Calcular la longitud de* $\boldsymbol{\sigma}(t) = 4\cos t\widehat{\mathbf{i}} + 4\sin t\widehat{\mathbf{j}}$ *de* $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'(t) &= -4\sin t\widehat{\mathbf{i}} + 4\cos t\widehat{\mathbf{j}} \\ |\boldsymbol{\sigma}'(t)| &= \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} = 4 \end{aligned}$$

la longitud de la trayectoria, que corresponde con la circunferencia de radio 4*, es*

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_0^{2\pi} 4dt = 8\pi$$

Example 12 *Calcular la longitud de* $\boldsymbol{\sigma}(t) = \cos t\widehat{\mathbf{i}} + \sin t\widehat{\mathbf{j}} + t\widehat{\mathbf{k}}$ *de* $0 \leq t \leq \frac{9\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'(t) &= -\sin t\widehat{\mathbf{i}} + \cos t\widehat{\mathbf{j}} + \widehat{\mathbf{k}} \\ |\boldsymbol{\sigma}'(t)| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

la longitud de la trayectoria, es

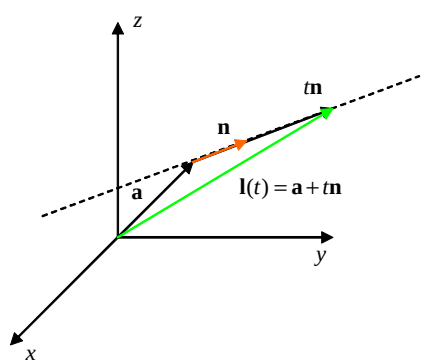
$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_0^{\frac{9\pi}{4}} \sqrt{2}dt = \frac{9}{4}\sqrt{2}\pi = 9.996\,5$$

Tarea Calcular la longitud de las siguientes trayectorias

1. Calcular la longitud de $\boldsymbol{\sigma}(t) = \cos 2t\widehat{\mathbf{i}} + \sin 2t\widehat{\mathbf{j}} + \sqrt{5}t\widehat{\mathbf{k}}$ de $0 \leq t \leq 4\pi$
2. Calcular la longitud de $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t - \sin t)\widehat{\mathbf{i}} + (1 - \cos t)\widehat{\mathbf{j}}$ de $0 \leq t \leq 4\pi$

2.2 Ecuación paramétrica de la línea recta

Sea el vector $\mathbf{a}$ que describe el punto (a_x, a_y, a_y) por donde pasa la linea $\mathbf{l}(t)$ con dirección $\widehat{\mathbf{n}}$



Ecuación paramétrica de la recta

la ecuación paramétrica de la recta es

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\widehat{\mathbf{n}}$$

Example 13 *Encontrar la ecuación paramétrica de la recta* $\mathbf{l}(t)$ *que pasa por el punto* $(2,3,-4)$ *con dirección* $\mathbf{n} = 3\widehat{\mathbf{i}} - 5\widehat{\mathbf{j}} + 6\widehat{\mathbf{k}}$. *(Obsérvese que* $\mathbf{a} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 4\widehat{\mathbf{k}}$*)*

$\widehat{\mathbf{n}} = 0.35857\widehat{\mathbf{i}} - 0.59761\widehat{\mathbf{j}} + 0.71714\widehat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= \mathbf{a} + t\widehat{\mathbf{n}} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 4\widehat{\mathbf{k}} + t(0.358\,57\widehat{\mathbf{i}} - 0.597\,61\widehat{\mathbf{j}} + 0.717\,14\widehat{\mathbf{k}}) \\ &= (2 + 0.358\,57t)\widehat{\mathbf{i}} + (3 - 0.597\,61t)\widehat{\mathbf{j}} + (-4 + 0.717\,14t)\widehat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Example 14 *Encontrar la ecuación paramétrica de la recta normal* $\mathbf{m}(t)$ *al plano formado por* $\mathbf{a}$ *y* $\widehat{\mathbf{n}}$ *y que pasa por* $(2,3,-4)$

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 24\widehat{\mathbf{j}} + 19\widehat{\mathbf{k}}$$

$\widehat{\mathbf{u}} = 6.\,519\,8 \times 10^{-2}\widehat{\mathbf{i}} + 0.782\,37\widehat{\mathbf{j}} + 0.619\,38\mathbf{k}$

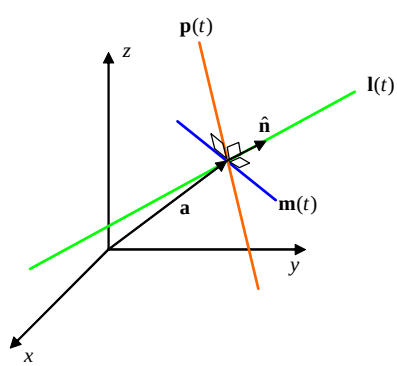
$$\begin{aligned}\mathbf{m}(t) &= \mathbf{a} + t\widehat{\mathbf{u}} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 4\widehat{\mathbf{k}} + t(6.\,519\,8 \times 10^{-2}\widehat{\mathbf{i}} + 0.782\,37\widehat{\mathbf{j}} + 0.619\,38\mathbf{k}) \\ &= (2 + 6.\,519\,8 \times 10^{-2}t)\widehat{\mathbf{i}} + (3 + 0.782\,37t)\widehat{\mathbf{j}} + (-4 + 0.619\,38t)\widehat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Example 15 *Hallar la ecuación paramétrica de la recta* $\mathbf{p}(t)$ *mutuamente perpendicular a* $\mathbf{l}(t)$ *y* $\mathbf{m}(t)$ *y que pasa por* $(2,3,-4)$

$$\widehat{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ 0.358\,57 & -0.597\,61 & 0.717\,14 \\ 6.\,519\,8 \times 10^{-2} & 0.782\,37 & 0.619\,38 \end{vmatrix} = -0.931\,22\widehat{\mathbf{i}} - 0.175\,33\widehat{\mathbf{j}} +$$

$0.319\,50\widehat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{a} + t\widehat{\mathbf{w}} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 4\widehat{\mathbf{k}} + t(-0.931\,22\widehat{\mathbf{i}} - 0.175\,33\widehat{\mathbf{j}} + 0.319\,50\widehat{\mathbf{k}}) \\ &= (2 - 0.931\,22t)\widehat{\mathbf{i}} + (3 - 0.175\,33t)\widehat{\mathbf{j}} + (-4 + 0.319\,50t)\widehat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$



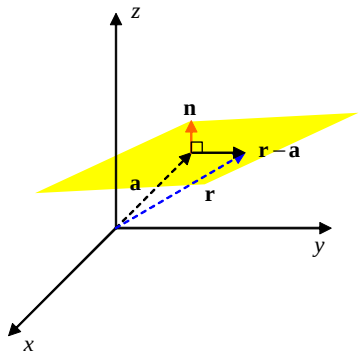
Determinación de un sistema cartesiano con tres rectas mutuamente perpendiculares

Remark 16 *Obsérvese que el conjunto de las tres rectas determinan un sistema cartesiano cuyo origen* $(2,3-4)$ *es el punto que señala el vector* $\mathbf{a} = 2\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 4\widehat{\mathbf{k}}$.

Tarea Obtenga un sistema cartesiano análogo al del ejercicio anterior que tenga como origen $(-1,3,6)$ donde uno de los ejes esté en la ditección $\mathbf{n} = -4\widehat{\mathbf{i}} + 5\widehat{\mathbf{j}} - \widehat{\mathbf{k}}$

2.3 Ecuación del plano

Sea el vector $\mathbf{a}$ que describe el punto (a_x, a_y, a_y) por donde pasa un plano, $\widehat{\mathbf{n}}$ un vector normal unitario a este y $\mathbf{r} = x\widehat{\mathbf{i}} + y\widehat{\mathbf{j}} + z\widehat{\mathbf{k}}$ el vector de posición de cualquier punto sobre el plano



Ecuación del plano

la ecuación paramétrica del plano resulta

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0$$

Example 17 *Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto* $(1, -2, 3)$ *y normal al vector* $\mathbf{n} = -3\widehat{\mathbf{i}} + \widehat{\mathbf{j}} + 4\widehat{\mathbf{k}}$

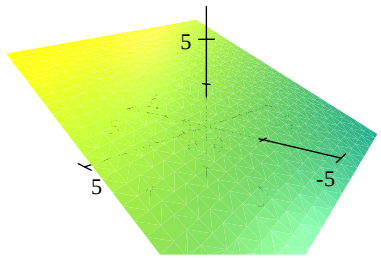
$\mathbf{a} = \widehat{\mathbf{i}} - 2\widehat{\mathbf{j}} + 3\widehat{\mathbf{k}}$

$\widehat{\mathbf{n}} = -0.588\,35\widehat{\mathbf{i}} + 0.196\,12\widehat{\mathbf{j}} + 0.784\,47\widehat{\mathbf{k}}$

$0 = \widehat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0.196\,12y - 0.588\,35x + 0.784\,47z - 1.\,372\,8$

Por lo tanto, la ecuación del plano resulta

$$0.196\,12y - 0.588\,35x + 0.784\,47z - 1.\,372\,8 = 0$$



Gráfica del plano

Example 18 *Determinar la ecuación del plano normal al plano del ejemplo anterior que contiene a los puntos* $(1, -2, 3)$ *y* $(1, 0, 2.5)$.

Primeramente observamos que $(1, 0, 2.5)$ *está sobre el plano del ejemplo anterior (plano I)*

$$0.196\,12(0) - 0.588\,35(1) + 0.784\,47(2.5) - 1.\,372\,8 = 0$$

y como $(1,-2,3)$ *también lo está, entonces el vector* $\mathbf{w}=(1-1)\widehat{\mathbf{i}}+(-2-0)\widehat{\mathbf{j}}+(3-2.5)\widehat{\mathbf{k}}$ *es perpendicular a* $\mathbf{n}$. *Así*

$$\widehat{\mathbf{w}}=0\widehat{\mathbf{i}}-0.970\,12\widehat{\mathbf{j}}+0.242\,53\widehat{\mathbf{k}}$$

$$\widehat{\mathbf{u}}=\widehat{\mathbf{w}}\times\widehat{\mathbf{n}}=\begin{vmatrix}\widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}}\\ 0 & -0.970\,12 & 0.242\,53\\ -0.588\,35 & 0.196\,12 & 0.784\,47\end{vmatrix}=-0.808\,60\widehat{\mathbf{i}}-0.142\,69\widehat{\mathbf{j}}-0.570\,77\widehat{\mathbf{k}}$$

La ecuación del plano II, normal al plano I es

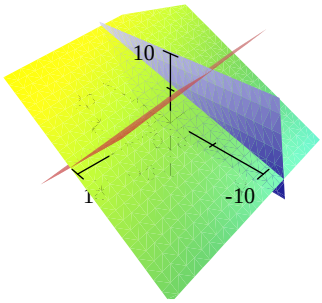
$$\begin{aligned}0 &= \widehat{\mathbf{u}}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a})=(-0.808\,60\widehat{\mathbf{i}}-0.142\,69\widehat{\mathbf{j}}-0.570\,77\widehat{\mathbf{k}})\cdot(x\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}+z\widehat{\mathbf{k}}-(\widehat{\mathbf{i}}-2\widehat{\mathbf{j}}+3\widehat{\mathbf{k}}))\\ &= 2.235\,7-0.142\,6y-0.57077z-0.8086x\end{aligned}$$

Example 19 *Determinar la ecuación del plano mutuamente normal a los planos de los ejemplos anteriores y que pasa por* $(1,-2,3)$

Por la geometría del problema el vector $\widehat{\mathbf{w}}$ *es el vector unitario normal al plano III, por lo que su ecuación resulta*

$$\begin{aligned}0 &= \widehat{\mathbf{w}}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a})=(0\widehat{\mathbf{i}}-0.970\,12\widehat{\mathbf{j}}+0.242\,53\widehat{\mathbf{k}})\cdot(x\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}+z\widehat{\mathbf{k}}-(\widehat{\mathbf{i}}-2\widehat{\mathbf{j}}+3\widehat{\mathbf{k}}))\\ &= 0.242\,53z-0.970\,12y-2.667\,8\end{aligned}$$

Por último, para corroborar la correspondencia de las ecuaciones con cada uno de los planos se resulve el sistema lineal resultante



Gráfica de tres planos mutuamente perpendiculares

$$\begin{aligned}0.196\,12y-0.588\,35x+0.784\,47z-1.372\,8 &= 0\\ 0.154\,3y-0.771\,52x-0.617\,21z+2.931\,8 &= 0\\ 0.242\,53z-0.970\,12y-2.667\,8 &= 0\end{aligned}$$

esto es, $[x=1.000\,1, y=-2.000\,0, z=3.0]$ *que es el único punto donde se intersectan los tres planos.*

Tarea

1. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(5, 2, -1)$ y normal al vector $\mathbf{n} = -\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} - 2\widehat{\mathbf{k}}$
   $\widehat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}\widehat{\mathbf{i}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\widehat{\mathbf{j}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\widehat{\mathbf{k}}$
   Ecuación del plano 1
   $$\frac{3}{14}\sqrt{14}y - \frac{1}{14}\sqrt{14}x - \frac{1}{7}\sqrt{14}z - \frac{3}{14}\sqrt{14} = 0$$

2. Determinar dos puntos que estén sobre el plano 1 y obtener la ecuación de otros dos planos mutuamente perpendiculares (o normales) al primero (véase ejemplo anterior).

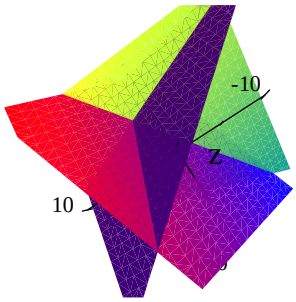
   el punto $(2, 3, 2)$ está sobre el plano 1, lo mismo que el vector $\mathbf{w}$
   $$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (5-2)\widehat{\mathbf{i}} + (2-3)\widehat{\mathbf{j}} + (-1-2)\widehat{\mathbf{k}} = 3\widehat{\mathbf{i}} - \widehat{\mathbf{j}} - 3\widehat{\mathbf{k}} \\ \widehat{\mathbf{w}} &= \frac{3}{\sqrt{19}}\widehat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{19}}\widehat{\mathbf{j}} - \frac{3}{\sqrt{19}}\widehat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

   de este modo la ecuación del plano 2 resulta
   $$\frac{3}{19}\sqrt{19}x - \frac{1}{19}\sqrt{19}y - \frac{3}{19}\sqrt{19}z - \frac{16}{19}\sqrt{19} = 0$$

   ahora, el vector mutuamente normal a $\widehat{\mathbf{n}}$ y a $\widehat{\mathbf{w}}$ es
   $$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{w}} = -\frac{11}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}\widehat{\mathbf{i}} - \frac{9}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}\widehat{\mathbf{j}} - \frac{4}{133}\sqrt{14}\sqrt{19}\widehat{\mathbf{k}}$$

   así, la ecuación del plano 3 queda determinada, resultando un sistema lineal de ecuaciones 3×3
   $$\begin{aligned} \frac{3}{14}\sqrt{14}y - \frac{1}{14}\sqrt{14}x - \frac{1}{7}\sqrt{14}z - \frac{3}{14}\sqrt{14} &= 0 \\ \frac{3}{19}\sqrt{19}x - \frac{1}{19}\sqrt{19}y - \frac{3}{19}\sqrt{19}z - \frac{16}{19}\sqrt{19} &= 0 \\ \frac{65}{266}\sqrt{14}\sqrt{19} - \frac{11}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}x - \frac{9}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}y - \frac{4}{133}\sqrt{14}\sqrt{19}z &= 0 \end{aligned}$$

   cuya solución es $(5, 2, -1)$, que es la punta del vector $\mathbf{a}$.



Gráfica de tres planos mutuamente perpendiculares

al resolver el sistema lineal 3×3

$$\begin{aligned}
\frac{3}{14}\sqrt{14}y - \frac{1}{14}\sqrt{14}x - \frac{1}{7}\sqrt{14}z - \frac{3}{14}\sqrt{14} &= 0 \\
\frac{3}{19}\sqrt{19}x - \frac{1}{19}\sqrt{19}y - \frac{3}{19}\sqrt{19}z - \frac{16}{19}\sqrt{19} &= 0 \\
\frac{65}{266}\sqrt{14}\sqrt{19} - \frac{11}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}x - \frac{9}{266}\sqrt{14}\sqrt{19}y - \frac{4}{133}\sqrt{14}\sqrt{19}z &= 0
\end{aligned}$$

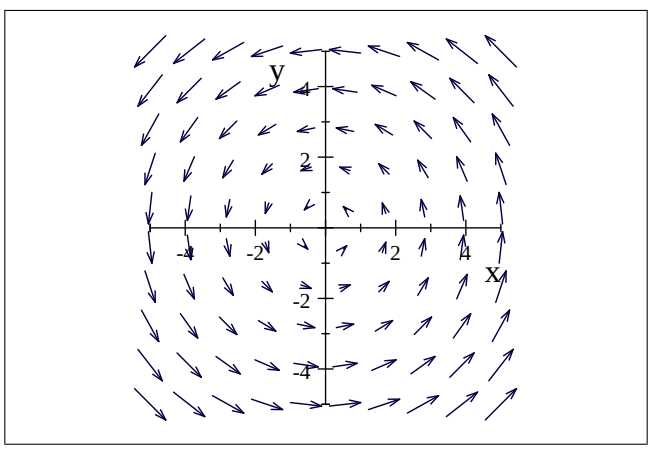
obtenemos $[x = 5, y = 2, z = -1]$ que es la punta del vector $\mathbf{a}$.

Tarea Obtener la un sistema de tres planos mutuamente perpendiculares que intersecten en el punto $(1, 1, 1)$ donde uno de ellos tiene al vector $\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{i}} + \widehat{\mathbf{j}} + \widehat{\mathbf{k}}$

2.4 Campos vectoriales

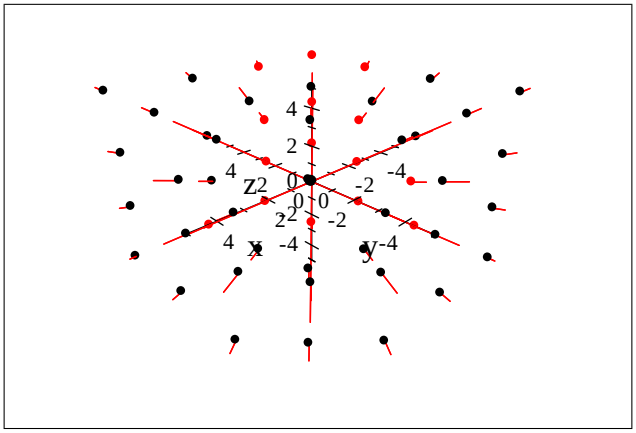
Definition 20 *Un campo vectorial en* $\mathbb{R}^n$ *es una función vectorial* $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *que asigna a cada punto de* A *un vector* $\mathbf{F}$

Example 21 *Graficar el campo vectorial* $\mathbf{F}(x, y) = -y\widehat{\mathbf{i}} + x\widehat{\mathbf{j}}$



Campo vectorial en 2D

Example 22 *Graficar el campo vectorial* $\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{\mathbf{x}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{\mathbf{i}} - \frac{\mathbf{y}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{\mathbf{k}}$



Campo vectorial en 3D

2.5 Integral de línea

Trabajo realizado por un campo vectorial F sobre la trayactoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$

Definition 23 *El trabajo realizado por una fuerza sobre un elemento de desplazamiento es*

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

*Sobre una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$, el trabajo realizado por un campo de fuerzas está dado por la i**ntegral de línea***

$$W = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

o bien

$$W = \int \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) dt$$

Example 24 *Dado el campo vectorial* $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 + y)\widehat{\mathbf{i}} + 7yx^3\widehat{\mathbf{j}} + xz\widehat{\mathbf{k}}$*, calcular el trabajo* $W = \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)dt$ *entre* $1 \leq t \leq 3$ *si la trayectoria es* $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\widehat{\mathbf{i}} + 2t\widehat{\mathbf{j}} + (t^3 - 2t)\widehat{\mathbf{k}}$.

Solución:

Por la componentes de la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= t^3 - 2t \end{aligned}$$

la velocidad es

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \widehat{\mathbf{i}} + 2\widehat{\mathbf{j}} + (3t^2 - 2)\widehat{\mathbf{k}}$$

parametrizando el campo

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) &= (2t^2+2t)\widehat{\mathbf{i}}+7(2t)(t)^3\widehat{\mathbf{j}}+t(t^3-2t)\widehat{\mathbf{k}}\\ &= (2t^2+2t)\widehat{\mathbf{i}}+14t^4\widehat{\mathbf{j}}+(t^4-2t^2)\widehat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

realizando el producto punto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t) &= ((2t^2+2t)\widehat{\mathbf{i}}+14t^4\widehat{\mathbf{j}}+(t^4-2t^2)\widehat{\mathbf{k}})\cdot(\widehat{\mathbf{i}}+2\widehat{\mathbf{j}}+(3t^2-2)\widehat{\mathbf{k}})\\ &= 3t^6+20t^4+6t^2+2t\end{aligned}$$

finalmente la integral de línea resulta

$$\begin{aligned}W &= \textstyle\int_0^3(3t^6+20t^4+6t^2+2t)dt\\ &= \frac{13\,806}{7}=1972.\,3\end{aligned}$$

Tarea Obtener las siguientes integrales de línea

1. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y)\widehat{\mathbf{i}}+(y-x)\widehat{\mathbf{j}}+z\widehat{\mathbf{k}}$ a lo largo de la trayectoria descrita por $\boldsymbol{\sigma}(t)=t^2\widehat{\mathbf{i}}+2t\widehat{\mathbf{j}}+4t^3\widehat{\mathbf{k}}$ entre $1\leq t\leq 3$

2. Se tiene un campo de fuerza en el espacio $\mathbf{F}(x,y,z)=x\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}+(xz-y)\widehat{\mathbf{k}}$. Calcula el trabajo hecho por esta fuerza cuando se mueve una partícula del punto $(0,0,0)$ al punto $(1,2,4)$ a lo largo del segmento de línea que une los dos puntos.

3. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=xyz\widehat{\mathbf{i}}-4yx\widehat{\mathbf{j}}-\frac{1}{4}z\widehat{\mathbf{k}}$, calcular $\int\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)dt$ entre $3\leq t\leq 6$ si la la trayectorial es $\boldsymbol{\sigma}(t)=t\widehat{\mathbf{i}}+t^2\widehat{\mathbf{j}}+(t^2+1)\widehat{\mathbf{k}}$.

4. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(2x-y)\widehat{\mathbf{i}}-6x\widehat{\mathbf{j}}+z^2\widehat{\mathbf{k}}$ a lo largo de la trayectoria descrita por $\boldsymbol{\sigma}(t)=t\widehat{\mathbf{i}}+2t^3\widehat{\mathbf{j}}-\widehat{\mathbf{k}}$ entre $3\leq t\leq 6$

5. Se tiene un campo de fuerza en el espacio $\mathbf{F}(x,y,z)=-x\widehat{\mathbf{i}}+xy\widehat{\mathbf{j}}+z^2\widehat{\mathbf{k}}$. Calcula el trabajo hecho por esta fuerza cuando se mueve una partícula del punto $(3,4,7)$ al punto $(4,-2,1)$ a lo largo del segmento de línea que une los dos puntos.Unidad 2. Funciones vectoriales

3 Unidad III. Cálculo diferencial de varias variables

3.1 Operadores diferenciales

Gradiente

Definition 25 *Sea $f(x,y,z)$. El **gradiente** se define como el vector*

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{\mathbf{k}}$$

Remark 26 *El gradiente de una función es un vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función.*

Laplaciano

Definition 27 *Sea $f(x,y,z)$. El **laplaciano** se define*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Diferencial

Definition 28 *Sea $f(x,y,z)$. La **diferencial** se define*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Derivada direccional

Definition 29 *Sea $f(x,y,z)$. La **derivada direccional** respecto al vector unitario $\widehat{\mathbf{n}}$ se define*

$$\boldsymbol{\nabla} f \cdot \widehat{\mathbf{n}}$$

Example 30 *Encuentra $\boldsymbol{\nabla} f$, $\nabla^2 f$ y df (gradiente, laplaciano y diferencial, respectivamente) de las siguientes funciones*

1. $f(x,y,z) = \sin^2(4xyz - 3z)$

   respecto a x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin^2(4xyz-3z) = -8yz\cos(3z-4xyz)\sin(3z-4xyz) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin^2(4xyz-3z) = 32y^2z^2\cos(6z-8xyz)
\end{aligned}$$

   se emplea el hecho de que $2\cos x \sin x = \sin 2x$. Respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin^2(4xyz-3z) = -8xz\cos(3z-4xyz)\sin(3z-4xyz) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sin^2(4xyz-3z) = 32x^2z^2\cos(6z-8xyz)
\end{aligned}$$

respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\sin^2(4xyz-3z) = -2\left(4xy-3\right)\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\sin^2(4xyz-3z) = 2\left(4xy-3\right)^2\cos\left(6z-8xyz\right)
\end{aligned}$$

el gradiente resulta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f &= -8yz\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)\widehat{\mathbf{i}} - 8xz\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)\widehat{\mathbf{j}} \\
&\quad -2\left(4xy-3\right)\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)\widehat{\mathbf{k}} \\
&= \cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)\left(-8yz\widehat{\mathbf{i}} - 8xz\widehat{\mathbf{j}} - 2\left(4xy-3\right)\widehat{\mathbf{k}}\right)
\end{aligned}$$

el laplaciano es

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 32y^2z^2\cos\left(6z-8xyz\right) + 32x^2z^2\cos\left(6z-8xyz\right) + 2\left(4xy-3\right)^2\cos\left(6z-8xyz\right) \\
&= 2\left(\cos\left(6z-8xyz\right)\right)\left(16x^2y^2 + 16x^2z^2 - 24xy + 16y^2z^2 + 9\right)
\end{aligned}$$

por último, la diferencial

$$\begin{aligned}
df &= -8yz\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)dx - 8xz\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)dy \\
&\quad -2\left(4xy-3\right)\cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)dz \\
&= \cos\left(3z-4xyz\right)\sin\left(3z-4xyz\right)\left(-8yzdx - 8xzdy - 2\left(4xy-3\right)dz\right)
\end{aligned}$$

2. $f(x,y,z) = \frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz}$

respecto a x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = \frac{-z+4x^2y^4}{4x^2z} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = \frac{1}{2x^3}
\end{aligned}$$

respecto a y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = -2\frac{y}{z}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = -\frac{2}{z}\left(\sqrt{z}-6xy^2\right)
\end{aligned}$$

respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{z^2}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{(2xy^2-\sqrt{z})^2}{4xz} = -\frac{1}{4}\frac{y^2}{z^3}\left(3\sqrt{z}-8xy^2\right)
\end{aligned}$$

el gradiente resulta

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{-z+4x^2y^4}{4x^2z}\widehat{\mathbf{i}} - 2\frac{y}{z}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right)\widehat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{z^2}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right)\widehat{\mathbf{k}}$$

el laplaciano es

$$\nabla^2 f = \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{z}\left(\sqrt{z}-6xy^2\right) - \frac{1}{4}\frac{y^2}{z^3}\left(3\sqrt{z}-8xy^2\right)$$

por último, la diferencial

$$df = \frac{-z+4x^2y^4}{4x^2z}dx - 2\frac{y}{z}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right)dy + \frac{1}{2}\frac{y^2}{z^2}\left(\sqrt{z}-2xy^2\right)dz$$

3. $f(x,y) = x^2e^{-2x+\sqrt{y}}$

respecto a x

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^{-2x+\sqrt{y}}) = -2xe^{\sqrt{y}-2x}\left(x-1\right)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2e^{-2x+\sqrt{y}}) = 2e^{\sqrt{y}-2x}\left(2x^2-4x+1\right)\end{aligned}$$

respecto a y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{-2x+\sqrt{y}}) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}-2x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2e^{-2x+\sqrt{y}}) = \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^{\frac{3}{2}}}e^{\sqrt{y}-2x}\left(\sqrt{y}-1\right)\end{aligned}$$

el gradiente resulta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} f &= -2xe^{\sqrt{y}-2x}\left(x-1\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}-2x}\widehat{\mathbf{j}}\\ &= xe^{\sqrt{y}-2x}(-2\left(x-1\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}\widehat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

el laplaciano es

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= 2e^{\sqrt{y}-2x}\left(2x^2-4x+1\right) + \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^{\frac{3}{2}}}e^{\sqrt{y}-2x}\left(\sqrt{y}-1\right)\\ &= e^{\sqrt{y}-2x}(2\left(2x^2-4x+1\right) + \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{y}-1\right))\end{aligned}$$

por último, la diferencial

$$\begin{aligned}df &= -2xe^{\sqrt{y}-2x}\left(x-1\right)dx + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}-2x}dy\\ &= xe^{\sqrt{y}-2x}(-2\left(x-1\right)dx + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}dy)\end{aligned}$$

4. Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = \frac{4x^2}{2x-yz}$ en el punto $(1,-1,3)$ en la dirección $\mathbf{n} = 3\widehat{\mathbf{i}} + 2\widehat{\mathbf{j}} - \widehat{\mathbf{k}}$.

   respecto a x
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{4x^2}{2x-yz} = \frac{8x(x-yz)}{(2x-yz)^2}$$

   respecto a y
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{4x^2}{2x-yz} = \frac{4x^2 z}{(2x-yz)^2}$$

   respecto a z
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{4x^2}{2x-yz} = \frac{4x^2 y}{(2x-yz)^2}$$

   el gradiente resulta
$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{8x(x-yz)}{(2x-yz)^2}\widehat{\mathbf{i}} + \frac{4x^2 z}{(2x-yz)^2}\widehat{\mathbf{j}} + \frac{4x^2 y}{(2x-yz)^2}\widehat{\mathbf{k}}$$

   evaluado en el punto $(1,-1,3)$
$$\boldsymbol{\nabla} f(1,-1,3) = \frac{32}{25}\widehat{\mathbf{i}} + \frac{12}{25}\widehat{\mathbf{j}} - \frac{4}{25}\widehat{\mathbf{k}}$$

   la derivada direccional resulta
$$\boldsymbol{\nabla} f(1,-1,3)\cdot\widehat{\mathbf{n}} = \frac{62}{175}\sqrt{14} = 1.325\,6$$

5. Una mosca vuela dentro de una habitación donde la temperatura ambiente no es constante y se describe por la función $T(x,y,z) = -2xy(1-4zy)^2$. Si la mosca, situada en la esquina de una silla con posición $(2,3,1)$, empieza a padecer "frío" (descenso en su temperatura corporal) ¿en qué dirección debe volar para calentarse *más rápidamente*?

   solución:

   Obteniendo el gradiente de $T(x,y,z) = -2xy(1-4zy)^2$
$$\boldsymbol{\nabla} f = -2y\left(4yz-1\right)^2\widehat{\mathbf{i}} - 2x\left(48y^2z^2 - 16yz + 1\right)\widehat{\mathbf{j}} - 16xy^2\left(4yz-1\right)\widehat{\mathbf{k}}$$

   evaluado en la posición de la mosca $(2,3,1)$*, obtenemos la dirección de crecimiento máximo de la función en ese punto, que es la ruta que debe seguir la mosca para calentarse más rápidamente.*
$$\boldsymbol{\nabla} f(2,3,1) = -1540\widehat{\mathbf{i}} - 3168\widehat{\mathbf{j}} - 726\widehat{\mathbf{k}}$$

Tarea

1. De las siguientes funciones obtener los operadores *gradiente, laplaciano y diferencial*

   (a) $f(x,y,z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
   (b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
   (d) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x+y+z}$
   (e) $f(x,y,z) = e^z \sin xy$
   (f) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{2z}{x^3+y^3}}$
   (g) $f(x,y,z) = e^{-xy^2} + y^3z^4$

2. Obtener la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto $(1,2,-3)$ en la dirección $\mathbf{n} = -\widehat{\mathbf{i}} + 3\widehat{\mathbf{j}} + 4\widehat{\mathbf{k}}$

   (a) $f(x,y,z) = \frac{z}{\cos^2 x + e^{-y}}$
   (b) $f(x,y,z) = z\sin(x^2 - 3xy)$

3. Un globo meteorológico se encuentra en una región de la atmósfera sujeto a una presión dada por

$$P(x,y,z) = e^{-z} + \frac{1}{x} + xe^{-y}$$

   si puntualmente se localiza en $(3,-2,5)$, encontrar la dirección en la cual el globo debe desplazarse para registrar un incremento de presión más rápidamente.

4. Un ingeniero egresado de la UPVM propone un modelo matemático para el cálculo de las utilidades de su empresa durante el presente año por la función

$$S(x,y,z) = \sqrt{\frac{2z}{x^3+y^3}}$$

   las variables corresponden a *parametros cuantificables de la calidad en el servicio (x)*, *inversiones a corto plazo para el mejoramiento de la maquinaria (y)* y a *parámetros de publicidad y mercadotecnia de su compañía (z)*. Su empresa se encuentra en un periodo de recesión con ubicación $(4,3,1)$ y nada, sólo su habilidad para el cálculo vectorial, salvará a la empresa de la bancarrota. ¿En qué dirección debe tomar sus decisiones para lograr las utilidades óptimas?

4 Unidad IV. Aplicaciones del cálculo diferencial de varias variables

5 Unidad V. Integración múltiple

5.1 Integrales dobles

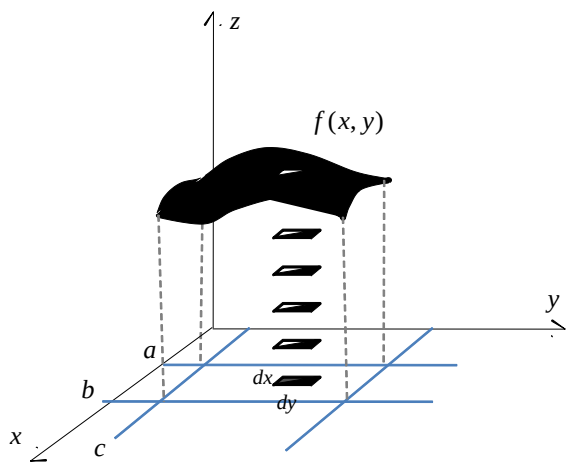
Sea $f(x,y)$ una función definida en una región rectángular R donde $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$. La integral doble sobre R se define

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

obsérvandose para las funciones que cumplen con el teorema de *Fubini*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Geométricamente la integral doble, para $f(x,y) > 0$, representa el volumen del sólido con base rectangular R y altura $f(x,y)$ (volumen de un panqué, con base rectangular)



Integral doble representa el volumen del panqué

Example 31 *Calcular la siguiente integral doble*

$$\int_2^3 \int_1^4 (3x^2 + x\sqrt{y})dxdy = 15\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 63 = 74.839$$

cambiando el orden de integración

$$\int_1^4 \int_2^3 (3x^2 + x\sqrt{y})dydx = 15\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 63 = 74.839$$

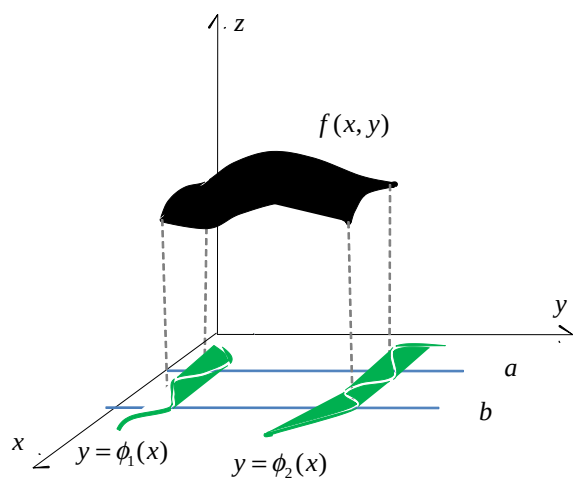
Tarea Calcular las siguientes integrales dobles

1. $\int_2^3 \int_1^3 3dxdy$

2. $\int_{-2}^{0}\int_{2}^{4} x dx dy$
3. $\int_{2}^{4}\int_{-2}^{0} y dx dy$
4. $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} 2xy dx dy$
5. $\int_{-2}^{2}\int_{2}^{3}(2x+4y) dx dy$
6. $\int_{-1}^{5}\int_{3}^{7}(x+2y)^3 dx dy$
7. $\int_{2}^{5}\int_{3}^{6}\sin(x+4y) dx dy$
8. $\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} x\cos(2x-y) dx dy$
9. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{3} e^{x+y} dx dy$
10. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} e^{x}\sin y dx dy$
11. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} x^2 y e^{xy} dx dy$
12. $\int_{2}^{3}\int_{2}^{3} \frac{1}{(2x+y-3)^3} dx dy$

5.2 Integrales dobles sobre regiones más generales

Sea $f(x,y)$ una función definida en una región R delimitada por $a \leqslant x \leqslant b$ y $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$

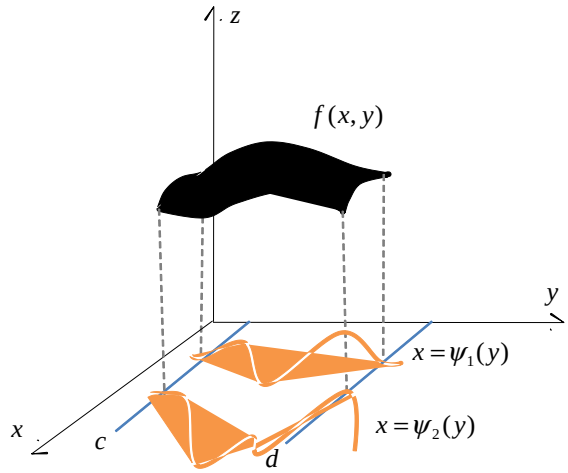


Volumen de un panqué rebanado curvamente a los costados

la integral doble sobre esta región se define

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy dx$$

significando geométricamente, como antes, el volumen del sólido con base R y altura $f(x,y)$. Análogamente, sea $f(x,y)$ una función definida en una región R delimitada por $c \leqslant y \leqslant d$ y $\psi_1(x) \leqslant x \leqslant \psi_2(x)$



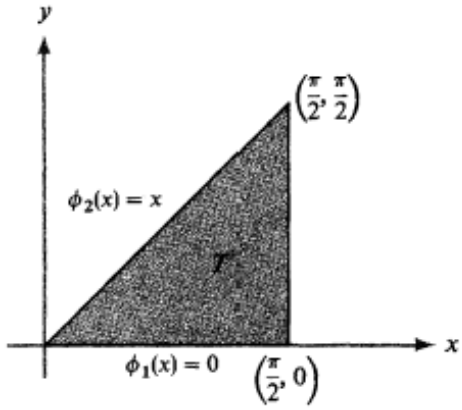
Volumen de un panqué rebanado curvamente enfrente y atrás

la integral doble sobre esta región se define

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

significando geométricamente, como antes, el volumen del sólido con base R y altura $f(x,y)$.

Example 32 *Integrar la función* $f(x,y) = x^3y + \cos x$ *en la región*



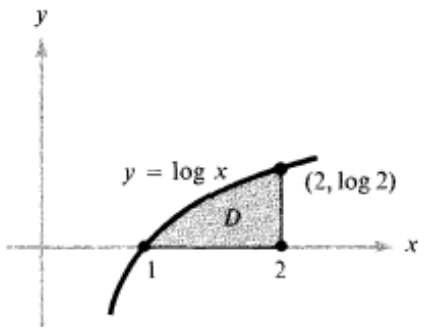
Empleando $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x (x^3y + \cos x)dydx = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{768}\pi^6 - 1 = 1.8226$$

Por otro lado, si empleamos $\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} (x^3 y + \cos x)dxdy = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{768}\pi^6 - 1$$

Example 33 *Integrar* $\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dydx$



Observamos que en el en orden establecido no es posible realizar la integración analíticamente. Procediendo de forma alterna observamos que $c = 0,\ d = \ln 2,\ \psi_1(y) = e^y, \psi_2(y) = 2$, *por lo que*

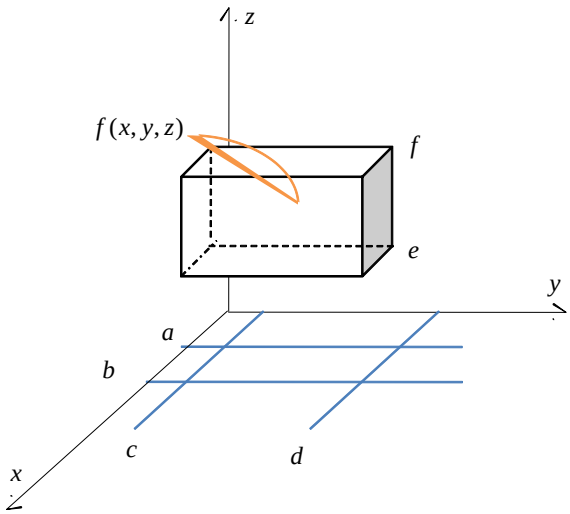
$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dxdy &= \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right) \\ &= 0.418\,11\end{aligned}$$

Tarea Realizar las siguientes integrales dobles

1. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx$
2. $\int_0^4 \int_0^y dxdy$
3. $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2}dxdy$ *(invierta el orden de integración)*
4. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^y} \frac{x}{y}dxdy$
5. $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}}dxdy$
6. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x+y)^2 dydx$ *(invierta el orden de integración)*
7. $\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dydx$
8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^x \sin(4x-y)dydx$
9. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{y^2} \sin\frac{x}{y}dxdy$
10. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^3 dydx$ *(invierta el orden de integración)*
11. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$ *(invierta el orden de integración)*

5.3 Integrales triples

Sea $f(x, y, z)$ función continua en la región del espacio limitado por el paralelepípedo de dimenciones $(b-a) \times (d-c) \times (f-e)$



Podemos definir la integral triple en esta región como

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dxdydz$$

de acuerdo con el teorema de Fubini, si $f(x, y, z)$ es continua en la región B, entonces podemos permutar el orden de combinación por ejemplo

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dxdydz = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x, y, z) dxdzdy = \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x, y, z) dzdxdy$$

De acuerdo con la definición de densidad $\rho = \frac{m}{V}$ (o bien $\rho V = m$), entonces $\rho(x, y, z)dxdydz$ representa la masa de la sustancia considerada en el volumen infinitesimal $dV = dxdydz$.

Example 34 *Sea $\rho(x, y, z) = z^2 \sin y + x$ la función de densidad de un gas. Determinar la masa contenida en un paralelepipedo con dimensiones determinadas por $a = 1, b = 4, c = 1, d = 6, e = 1, f = 2$*

solución

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b \rho(x, y, z) dxdydz = \int_1^2 \int_1^6 \int_1^4 (z^2 \sin y + x) dxdydz = 34.561$$

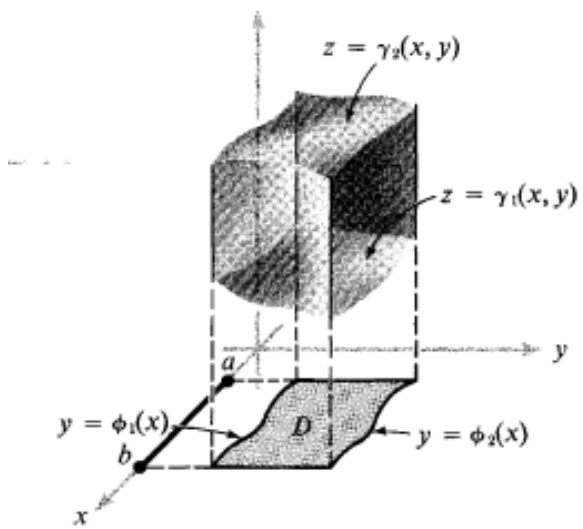
Tarea Sea $\rho(x, y, z)$ la función de densidad de una masa no homogénea. Determinar la masa contenida en un paralelepipedo con dimensiones $(b-a) \times (d-c) \times (f-e)$ para cada caso

1. $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} xy\sin yz dxdydz$
2. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 ye^{-yx}dxdydz$
3. $\int_1^2\int_{-1}^1\int_0^1(2x+3y+z)dxdydz$
4. $\int_1^2\int_{-1}^1\int_0^1 ze^{x+y}dxdydz$
5. $\int_1^2\int_0^1\int_1^3 \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz$

5.4 Integrales triples sobre regiones más generales

Si B es una región limitada por

$$a \leq x \leq b,\ \phi_1(x)\ \leq y \leq\ \phi_2(x),\ \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)$$

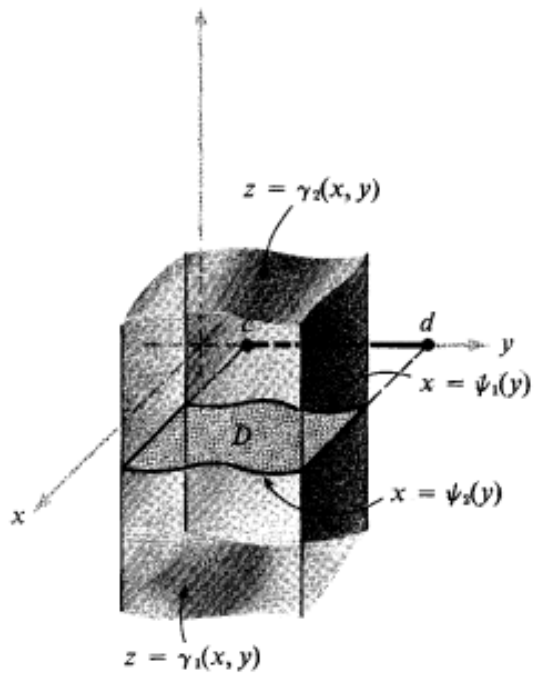


la integral triple resulta

$$\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Si B es una región limitada por

$$c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)$$



la integral triple resulta

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

si la función a integrar es una función de densidad, entonces la integral triple igualmente representa la masa contenida dentro de la región a integrar.

Example 35 *La densidad de cierto fluido no homogéneo está dada por* $\rho(x,y,z) = x$*, obtener la masa contenida dentro de la región delimitada por* $a = 0,\ b = 1,\ \phi_1(x) = 0,\ \phi_2(x) = 1 - x,\ \gamma_1(x,y) = 2y,\ \gamma_2(x,y) = 1 + y^2$

$$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx = \frac{1}{10}$$

Example 36 *Realizar la siguiente integral triple*

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z dzdxdy = \frac{47}{24}$$

Tarea Resolver las siguientes integrales triples (que representa la masa dentro de la región si el integrando es una función de densidad $\rho(x,y,z)$)

1. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x+y+z)dzdydx$
2. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} xdzdxdy$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{xy} \cos \frac{z}{y} dzdxdy$

4. $\int_0^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{3x}} \frac{x}{z^2+x^2} dzdxdy$