Unidad 0. Métodos de integración

0.1 Integrales de funciones transcendentes

i. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

ii. $\int \cos x dx = \sin x + c$

iii. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

iv. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

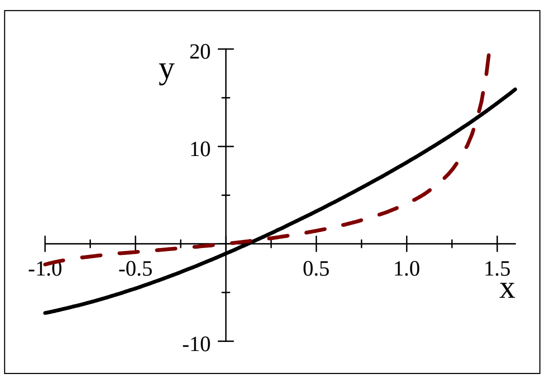
v. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$

vi. $\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x|$

vii. $\int e^x dx = e^x + c$

viii. $\int \ln x dx = -x + x\ln x + c$

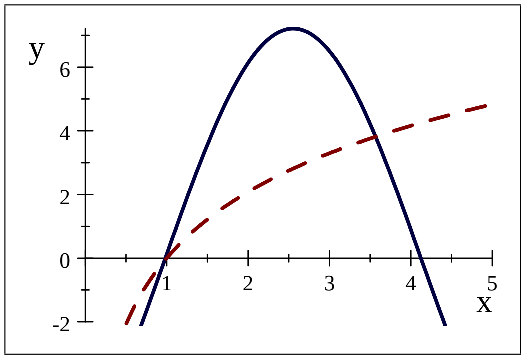
Example 1 *Cálcular el área entre las curvas* $f(x) = 5\sin x + 3e^x - 4,\ g(x) = x^2 + 2\tan x$



el área comprendida entre curvas

$$\int_{0.165\,13}^{1.\,391\,7} (5\sin x + 3e^x - 4 - x^2 - 2\tan x)dx = 3.\,341\,4$$

Example 2 *Cálcular el área entre las curvas* $f(x) = 4\sin x - 6\cos x$ *(continua),* $g(x) = 3\ln x$ *(punteada)*



el área comprendida entre curvas

$$\int_{0.970\,21}^{3.\,566\,9} (4\sin x - 6\cos x - 3\ln x)dx = 7.\,423\,8$$

0.2 Integración por cambio de variable

El método de cambio de variable consiste en transformar el integrando en una expresión analíticamente integrable

Example 3 *Integrar*

$$\int_1^2 (2x+1)dx = 4$$

Example 4 *Integrar*

$$\int \sin 2x dx$$

haciendo $u = 2x, \; du = 2dx$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \sin 2x(2dx) &= \frac{1}{2}\int \sin u du + c \\ &= \frac{1}{2}(-\cos u) + c \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x + c \end{aligned}$$

Example 5 *Integrar*

$$\int 4\cos(\frac{1}{2}x - 3)dx$$

haciendo $u = \frac{1}{2}x - 3,\ du = \frac{1}{2}dx$

$$\begin{aligned}
(4)(2)\int \cos(\frac{1}{2}x-3)(\frac{1}{2}dx) &= 8\int \cos u du \\
&= 8\sin u + c \\
&= 8\sin(\frac{1}{2}x-3)+c
\end{aligned}$$

Example 6 *Integrar*

$$\int e^{-2x+3}dx$$

haciendo $u = -2x+3,\ du = -2x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-2}\int e^{-2x+3}(-2dx) &= -\frac{1}{2}\int e^{u}du \\
&= -\frac{1}{2}e^{u}+c \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x+3}+c
\end{aligned}$$

Example 7 *Integrar*

$$\int \sqrt{5x+1}dx$$

haciendo $u = 5x+1,\ du = 5x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\int \sqrt{5x+1}(5dx) &= \frac{1}{5}\int \sqrt{u}du \\
&= \frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}+c \\
&= \frac{2}{15}(5x+1)^{\frac{3}{2}}+c
\end{aligned}$$

Example 8 *Integrar*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x dx$$

haciendo $u = \sin x,\ du = \cos x dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\cos x dx &= \int u^3 du \\
&= \frac{1}{4}u^4+c \\
&= \frac{1}{4}\sin^4 x + c
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x dx &= [\frac{1}{4}\sin^4 x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin^4 0 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Example 9 *Integrar*

$$\int 3x\sqrt{x^2+1}dx$$

haciendo $u = x^2+1,\ du = 2xdx$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int\sqrt{x^2+1}(2xdx) &= \frac{3}{2}\int\sqrt{u}du\\ &= u^{\frac{3}{2}}+c\\ &= (x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c\end{aligned}$$

Example 10 *Integrar*

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

haciendo $u = \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}2\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} &= 2\int e^u du\\ &= 2e^u+c\\ &= 2e^{\sqrt{x}}+c\end{aligned}$$

Example 11 *Integrar*

$$\int_0^1 x^2(6-2x^3)^{\frac{2}{5}}dx$$

haciendo $u = 6-2x^3,\ du = -6x^2dx$

$$\begin{aligned}\frac{1}{-6}\int(6-2x^3)^{\frac{2}{5}}(-6x^2dx) &= \int u^{\frac{2}{5}}du\\ &= \frac{5}{7}u^{\frac{7}{5}}+c\\ &= \frac{5}{7}(6-2x^3)^{\frac{7}{5}}+c\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2(6-2x^3)^{\frac{2}{5}}dx &= [-\frac{5}{42}(6-2x^3)^{\frac{7}{5}}]_0^1\\ &= 0.633\,53\end{aligned}$$

Example 12 *Integrar*

$$\int 3x\cos x^2dx$$

haciendo $u = x^2,\ du = 2xdx$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int\cos x^2(2xdx) &= \frac{3}{2}\int\cos udu\\ &= \frac{3}{2}\sin u+c\\ &= \frac{3}{2}\sin x^2+c\end{aligned}$$

Example 13 *Integrar*

$$\int x^2\sqrt{1+x}dx$$

haciendo $u = 1-x,\ du = dx,$ *y sabiendo que* $x^2 = (1-u)^2$

$$\begin{aligned}\int (1-u)^2\sqrt{u}du &= \int (\sqrt{u} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}})du \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + c\end{aligned}$$

Tarea a. Efectuar las siguientes integrales aplicando el cambio de variable adecuado

1. $\int \sqrt{1-6x}dx$
2. $\int \sqrt[3]{5-2x}dx$
3. $\int 5x\sqrt{4-x^2}dx$
4. $\int x^2(2x^3+8)^5dx$
5. $\int 4x\sqrt[3]{(1-3x^2)^2}dx$
6. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^4}$
7. $\int (x^2+4x+4)^{-\frac{5}{2}}dx$
8. $\int (x^3+3)^{\frac{1}{4}}x^5dx$
9. $\int \sin\frac{\pi}{4}xdx$
10. $\int 4x^2\cos x^3dx$
11. $\int x^2\sec^2 x^3dx$
12. $\int \cos x(1-\sin x)^5dx$
13. $\int \frac{5\sin xdx}{(3+\cos x)^3}$

0.3 Integración por partes

El método de integración por partes consiste en reescribir una integral compleja en terminos de otra más simple empleando la fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Example 14 *Integrar*

$$\int xe^x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned} u &= x,\ du = dx \\ dv &= e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c \end{aligned}$$

Example 15 *Integrar*

$$\int x^2 e^x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned} u &= x^2,\ du = 2xdx \\ dv &= e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= x^2 e^x - \int e^x (2xdx) \\ &= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \end{aligned}$$

utilizando el resultado del ejercicio anterior

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Remark 16 *Al integrar* $\int x^n e^x dx$ *se corresponde siempre*

$$\begin{aligned} u &= x^n \\ dv &= e^x dx \end{aligned}$$

Example 17 *Integrar*

$$\int \ln x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned} u &= \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv &= dx,\ v = \int dx = x \end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x\ln x - \int x(\frac{1}{x}dx) \\ &= x\ln x - x + c \end{aligned}$$

Example 18 *Integrar*

$$\int x\ln x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned} u &= x,\ du = dx \\ dv &= \ln x dx,\ v = \int \ln x dx = x\ln x - x \end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned} \int x\ln x dx &= x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)dx \\ &= x^2\ln x - x^2 - \int x\ln x dx + \int x dx \\ &= x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 - \int x\ln x dx \end{aligned}$$

despejando $\int x\ln x dx$

$$\begin{aligned} \int x\ln x dx + \int x\ln x dx &= x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 \\ \int x\ln x dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \end{aligned}$$

Example 19 *Integrar*

$$\int x^2\ln x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned} u &= x^2,\ du = 2x dx \\ dv &= \ln x dx,\ v = \int \ln x dx = x\ln x - x \end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= x^2(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)(2xdx) \\ &= x^3 \ln x - x^3 - 2\int x^2 \ln x dx + 2\int x^2 dx \\ &= x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 - 2\int x^2 \ln x dx\end{aligned}$$

despejando $\int x^2 \ln x dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx + 2\int x^2 \ln x dx &= x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 \\ \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\end{aligned}$$

Remark 20 *Al integrar* $\int x^n \ln x dx$ *se corresponde siempre*

$$\begin{aligned}u &= x^n \\ dv &= \ln x dx\end{aligned}$$

Example 21 *Integrar*

$$\int x\cos x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned}u &= x, \ du = dx \\ dv &= \cos x dx, \ v = \int \cos x dx = \sin x\end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + c\end{aligned}$$

Example 22 *Integrar*

$$\int e^{2x}\cos 3x dx$$

haciendo

$$\begin{aligned}u &= e^{2x}, \ du = 2e^{2x}dx \\ dv &= \cos 3x dx, \ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\end{aligned}$$

aplicando

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos 3x dx &= e^{2x}(\frac{1}{3}\sin 3x) - \int \frac{1}{3}\sin 3x(2e^{2x}dx) \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\end{aligned}$$

integrando por partes nuevamente la integral de la derecha

$$\begin{aligned} u &= e^{2x},\ du = 2e^{2x}dx \\ dv &= \sin 3x dx,\ v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\sin 3x dx &= e^{2x}(-\frac{1}{3}\cos 3x) - \int(-\frac{1}{3}\cos 3x)(2e^{2x}dx) \\ &= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\cos 3x dx &= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx) \\ &= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx \end{aligned}$$

despejando la integral

$$\int e^{2x}\cos 3x dx + \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x$$

o bien

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + c$$

Tarea b. Aplicando la integración por partes resuelva las siguientes integrales

1. $\int_{-1}^{0} xe^{-3x}dx$
2. $\int_{0}^{3} x\cos\pi x dx$
3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec x\tan x dx$
4. $\int_{0}^{1}(\ln x)^2 dx$
5. $\int x\sec^2 x dx$
6. $\int_{0}^{2} x^2\sin\pi x dx = -\frac{4}{\pi}$
7. $\int_{0}^{\pi} e^{-2x}\cos x dx = \frac{2}{5}e^{-2\pi} + \frac{2}{5}$
8. $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{e^x}dx = \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2}$
9. $\int \frac{xe^x}{(x-1)^2}dx = e^x\left(\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right) - \int e^x\left(\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right)dx$
10. $\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

0.4 Integración por sustitución trigonométrica

Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$ es posible realizar una sustitución trigonométrica para resolver la integral.

0.4.1 Integrando con $\sqrt{a^2 - x^2}$

Si el integrando contiene la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ se hace la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a \sin\theta \\ dx &= a \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

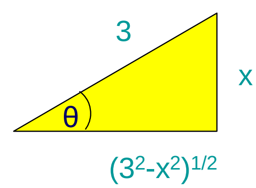
Example 23 *Integrar por sustitución trigonométrica*

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$$

reescribiendo $\int \frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{x^2} dx$. *Haciendo la sustitución* $x = 3\sin\theta$; $dx = 3\cos\theta d\theta$ *tenemos*

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3^2 - (3\sin x)^2}}{(3\sin x)^2}(3\cos\theta d\theta) &= \int \frac{3\cos\theta}{3^2 \sin^2 x}(3\cos\theta d\theta) \\ &= \int \cot^2\theta d\theta = -\cot\theta - \theta + c \end{aligned}$$

ahora, como $\sin\theta = \frac{x}{3}$, *entonces podemos construir el siguiente triángulo*



observamos que $\cot\theta = \frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{x}$ *y* $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{3})$. *Por lo tanto*

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1}(\frac{x}{3}) + c$$

0.4.2 Integrando con $\sqrt{a^2 + x^2}$

Si el integrando contiene la expresión $\sqrt{a^2 + x^2}$ se hace la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a \tan\theta \\ dx &= a \sec^2\theta \end{aligned}$$

Example 24 *Integrar por sustitución trigonométrica*

$$\int \sqrt{5 + x^2} dx$$

reescribiendo $\int \sqrt{(\sqrt{5})^2 + x^2}dx$. *Haciendo la sustitución* $x = \sqrt{5}\tan\theta;\ dx = \sqrt{5}\sec^2\theta d\theta$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}\tan\theta)^2}dx &= \int \sqrt{5}\sec x(\sqrt{5}\sec^2\theta d\theta) \\ &= 5\int \sec^3\theta d\theta\end{aligned}$$

integrando esta última integral por partes

$$\begin{aligned}u &= \sec\theta;\ du = \sec\theta\tan\theta d\theta \\ dv &= \sec^2\theta d\theta;\ v = \tan\theta\end{aligned}$$

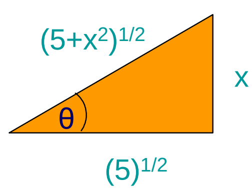
por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta d\theta &= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta - \int \sec\theta d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta|\end{aligned}$$

despejando $\int \sec^3\theta d\theta$

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|$$

ahora, como $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$ *entonces podemos construir el siguiente triángulo*



observamos que $\sec\theta = \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}$. *Por lo tanto*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \frac{5}{2}\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + c \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{5+x^2} - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}\right| + c\end{aligned}$$

0.4.3 Integrando con $\sqrt{x^2 - a^2}$

Si el integrando contiene la expresión $\sqrt{x^2 - a^2}$ se hace la sustitución

$$\begin{aligned}x &= a\sec\theta \\ dx &= a\sec\theta\tan\theta\end{aligned}$$

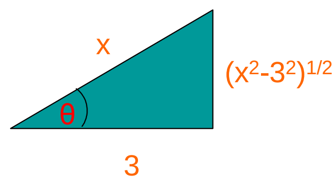
Example 25 *Integrar por sustitución trigonométrica*

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$

reescribiendo $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3^2}}$. *Haciendo la sustitución* $x = 3\sec\theta$; $dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\sec\theta\tan\theta d\theta}{(3\sec\theta)^3\sqrt{(3\sec\theta)^2-3^2}} &= \int \frac{3\sec\theta\tan\theta d\theta}{(3^3\sec^3\theta)3\tan\theta} = \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{27}(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta) \\
&= \frac{1}{54}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) = \frac{1}{54}(\theta + \sin\theta\cos\theta)
\end{aligned}$$

ahora, como $\sec\theta = \frac{x}{3}$ *entonces podemos construir el siguiente triángulo*



observamos que $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, $\cos\theta = \frac{3}{x}$ *y* $\theta = \sec^{-1}(\frac{x}{3})$. *Por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \frac{1}{54}(\sec^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\frac{3}{x}) + c \\
&= \frac{1}{54}\sec^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{1}{18}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c
\end{aligned}$$

Tarea c. Resolver las siguientes integrales por sustitución trigonométrica

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+6}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
6. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
7. $\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{\frac{3}{2}}}$
8. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}$
10. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^2}}$

0.5 Integración de funciones racionales por fracciones parciales

Considérese la integral $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, donde $f(x)$ y $g(x) \neq 0$ son polinomios y $g(x)$ se puede expresar en factores lineales y cuadráticos irreductibles. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)}{(a+bx)^n (c+dx+ex^2)^k} \\
&= \frac{A_1}{(a+bx)} + \frac{A_2}{(a+bx)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(a+bx)^n} \\
&\quad + \frac{B_1 + C_1 x}{(c+dx+ex^2)} + \frac{B_2 + C_2 x}{(c+dx+ex^2)^2} + \cdots + \frac{B_k + C_k x}{(c+dx+ex^2)^k}
\end{aligned}$$

donde $A_1, ..., A_n,\ B_1..., B_k,\ C_1..., C_k$ son las constantes a determinar.

Example 26 *Integrar por fracciones parciales*

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$$

Solución:

$$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

multiplicando la ecuación anterior por $(x+2)(x-1)$

$$x + 5 = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x + (2B - A)$$

relacionando los terminos obtenemos

$$\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
2B - A &= 5
\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones resulta $A = -1$ *y* $B = 2$. *Por lo tanto,*

$$\int \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} dx = -\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + c$$

Example 27 *Integrar por fracciones parciales*

$$\int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} dx$$

Solución:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

multiplicando la ecuación anterior por $(x-1)^2(x+1)$

$$\begin{aligned}
4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\
&= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (B-A+C)
\end{aligned}$$

relacionando los terminos obtenemos

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B-2C &= 4 \\ B-A+C &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones resulta $A=1,\ B=2$ *y* $C=-1$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}dx &= \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

Example 28 *Integrar por fracciones parciales*

$$\int \frac{1-3x+2x^2-x^3}{x^5+2x^3+x}dx$$

Solución:

$$\frac{1-3x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1} + \frac{D+Ex}{(x^2+1)^2}$$

multiplicando la ecuación anterior por $x\left(x^2+1\right)^2$

$$\begin{aligned} 1-3x+2x^2-x^3 &= A\left(x^2+1\right)^2 + (B+Cx)x(x^2+1) + (D+Ex)x \\ &= A + (B+D)x + (2A+C+E)x^2 + Bx^3 + (A+C)x^4 \end{aligned}$$

relacionando los terminos obtenemos

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B+D &= -3 \\ 2A+C+E &= 2 \\ B &= -1 \\ A+C &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones resulta $A=1,\ B=-1,\ C=-1,\ D=-2$ *y* $E=1$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} \int \frac{1-3x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx &= \int (\frac{1}{x} + \frac{-1-x}{x^2+1} + \frac{-2+x}{(x^2+1)^2})dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{x^2+1} \\ &\quad -2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

integrando por sustitución trigonométrica $\int \frac{dx}{x^2+1}$*, donde* $x = \tan\theta;\ dx = \sec^2\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta + 1} &= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \int d\theta = \theta \\
\int \frac{dx}{x^2+1} &= \tan^{-1} x
\end{aligned}$$

integrando también por sustitución trigonométrica $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$*, donde* $x = \tan\theta;\ dx = \sec^2\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta + 1)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta} = \int \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-3x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx &= \ln|x| - 2\tan^{-1} x \\
& \quad -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+1} + c
\end{aligned}$$

Tarea d. Resolver las siguientes integrales por fracciones parciales

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$
2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$
3. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+x-6}$
4. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$
5. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$
6. $\int \frac{9x^2-26x-5}{3x^2-5x-2}dx$
7. $\int \frac{(5x^2-11x+5)dx}{x^3-4x^2+5x-2}$
8. $\int \frac{dx}{2x^3+x}$
9. $\int \frac{(x+4)dx}{x(x^2+4)}$
10. $\int \frac{dx}{16x^4-1}$

11. $\int \frac{(x^2-4x-4)dx}{x^3-2x^2+4x-8}$

12. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$

13. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$

14. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

15. $\int \frac{(2x^3+9x)dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$

1 Unidad. Introducción a las ecuaciones diferenciales

Notation 29 *Usualmente en la literatura se presentan las funciones de una variable junto con sus derivadas de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 5x \\ f'(x) &= 6x + 5 \end{aligned}$$

la nomenclatura empleada en este curso para dichas funciones es

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 5x \\ \frac{dy}{dx} &= y\acute{} = 6x + 5 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= y'' = 6 \end{aligned}$$

donde **y** *se denomina la* ***variable dependiente*** *y* **x** *la* ***variable independiente.***

1.1 Noción del problema de las ecuaciones diferenciales

Considérese la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

el problema es: dada la anterior ecuación, obtener una función $y = y(x)$ que la reduzca a una identidad. Probemos por ejemplo la función $y = 2 + 3x^{-1}$

$$\begin{aligned} x(6x^{-3}) + 2(-3x^{-2}) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

observamos luego, que la función resuelve la ecuación diferencial y por lo tanto nuestro problema está resuelto (hasta cierto punto). A la función $y = 2 + 3x^{-1}$ se le denomina **solución** de la ecuación diferencial.

Definition 30 *Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una* ***ecuación diferencial****.*

1.2 Clasificación de las ED según el tipo

Definition 31 *Si la ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una* ***ecuación diferencial ordinaria (EDO).***

Example 32

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - 2y &= 4\\ (x-y)dx - 2ydy &= 0\\ \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dx} &= u\end{aligned}$$

Definition 33 *Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llaman* ***ecuaciones diferenciales parciales.***

Example 34

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial y}\\ xc + \frac{\partial u}{\partial y} &= u\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

1.3 Clasificación de las ED según el orden

El orden de la más alta derivada de una ecuación diferencial se llama el **orden** de la ecuación.

Example 35

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 4y &= 0 \textit{ (segundo orden)}\\ x^2dy + ydx &= 0 \textit{ (primer orden)}\\ a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \textit{ (cuarto orden)}\end{aligned}$$

Exercise 36 *Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales según tipo (ordinaria o parcial) y orden*

1. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$
2. $xy' - y = x^3y^4$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
4. $x(6xy+5)dx + (2x^3+3y)dy = 0$
5. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
6. $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$
7. $xy(\frac{dy}{dx})^3 + \frac{d^2y}{dx^2} = x$

1.4 Clasificación según la linealidad o no linealidad

Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+....+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

las ecuaciones diferenciales lineales cumplen dos propiedades:

i) la variable dependiente y junto con sus derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de cada término en y es 1.

ii) cada coeficiente uno de los coeficientes $a_i(x),\ i=0,...,n,$ dependen sólo de la variable independiente x.

Una ecuación que no es lineal se dice simplemente no lineal.

Example 37

$$\begin{aligned} xdy+ydx &= 0 \textit{ (lineal)} \\ y''-2y'+y &= 0 \textit{ (lineal)} \\ x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y &= e^x \textit{ (lineal)} \\ yy''-2y' &= x \textit{ (no lineal)} \\ \frac{d^3y}{dx^3}+y^2 &= 0 \textit{ (no lineal)} \end{aligned}$$

Exercise 38 *Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales de acuerdo a su linealidad*

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=2x$
2. $y'''-3y''+4y'-4xy^2=3x$
3. $y''+(y')^2=0$
4. $y'=2\sqrt{y}$
5. $y'-\frac{1}{x}y=1$
6. $(x+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$
7. $y''+y=\tan x$
8. $(\frac{dy}{dx})^3+2x\frac{dy}{dx}=2y+1$
9. $y=xy'+\frac{1}{x^2}y''$
10. $x^2y''+yy'+6x=0$

Tarea 1. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por tipo, orden y por linealidad.

1. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2(\frac{dy}{dx})^4 + y = 0$

3. $yy' + 2y = 1 + x^2$

4. $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y$

7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{d^2y}{dx^2})^2}$

8. $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}$

9. $(\sin x)y''' - (\cos x)y' = 2$

10. $(1-y^2)dx + xdy = 0$

1.5 Solución de una Ecuación Diferenfencial Ordinaria

Definition 39 *Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo I, es **solución** de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.*

Example 40 *La función $y = \frac{x^4}{16}$ es una **solución particular**, en el intervalo $-\infty < x < \infty$, de la ecuación no lineal*

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$

Example 41 *La función $y = xe^x$ es una solución particular, en el intervalo $-\infty < x < \infty$, de la ecuación lineal*

$$y'' - 2y' + y = 0$$

*se observa que la función $y = cxe^x$, donde $c \in \mathbf{R}$ es un parámetro, también es solución de la ecuación. Por lo tanto, se puede argumentar que existen un numero infinito de soluciones. Cuando $c = 0$, la solución es $y = 0$ a menudo denominada **solución trivial.***

Example 42 *Para $-2 < x < 2$ la relación $x^2 + y^2 = 4$ es una **solución implícita** de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

obsérvese que la relación $x^2 + y^2 = c$, para $c > 0$, también es solución de la ecuación.

Example 43 *Las funciones* $y = c_1 \cos 4x$ *y* $y = c_2 \sin 4x$*, en donde* c_1 *y* c_2 *son constantes arbitrarias, resultan ser soluciones a la ecuación diferencial*

$$y'' + 16y = 0$$

obsérvese que la función $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$ también es una solución a la ecuación dada.

Cuando todas las soluciones de una ecuación diferencial orden n pueden obtenerse de la una función $G(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ mediante valores apropiados de los parámetros $c_1, ..., c_n$, entonces se dice que la función G es una **solución general o completa** a la ecuación diferencial.

Example 44 *Comprobar si las funciones son soluciones a las ecuaciones diferenciales*

Tarea 2. Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada.

1. $2y' + y = 0;\ y = e^{-\frac{x}{2}}$
2. $y' + 4y = 32;\ y = 8$
3. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x};\ y = e^{3x} + 10e^{2x}$
4. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24;\ y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$
5. $y' = 25 + y^2;\ y = 5 \tan 5x$
6. $y' + y = \sin x;\ y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + 10e^{-x}$
7. $x^2 dy + 2xydx = 0;\ y = -\frac{1}{x^2}$
8. $y = 2xy' + y(y')^2;\ y^2 = c_1(x + \frac{1}{4}c_1)$
9. $y'' - 6y' + 13y = 0;\ y = e^{3x} \cos 2x$
10. $y'' + 25y = 0;\ y = c_1 \cos 5x$
11. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0;\ y = x^2 + x^2 \ln x$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;\ y = x^2 e^x$

2 Unidad. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

2.1 Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definition 45 *La ecuación diferencial de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)}$$

se denomina ***ecuación de variables separables.*** *El método de solución de dicha ecuación se resume como sigue*

$$h(y)dy = f(x)dx$$

integrando ambos miembros

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx + c$$

donde c es la constante de integración resultante de ambas integraciones.

Example 46 *Resolver la ecuación diferencial*

$$3y^2\frac{dy}{dt} = 1$$

solución

$$3y^2dy = dt$$

empleando la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$*, integramos*

$$\begin{aligned} 3\int y^2dy &= \int dt + c \\ 3(\frac{y^3}{3}) &= t + c \end{aligned}$$

o bien, la solución implícita resulta

$$y^3 = t + c$$

Example 47 *Resolver la ecuación diferencial*

$$(y-2)dy + y(x+4)dx = 0$$

solución

$$\begin{aligned} (y-2)dy &= -y(x+4)dx \\ \frac{y-2}{y}dy &= -(x+4)dx \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned}\int dy - 2\int \frac{dy}{y} &= -\int x dx - 4\int dx + c \\ y - 2\ln|y| &= -\frac{x^2}{2} - 4x + c\end{aligned}$$

Exercise 48 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables*

1. $\frac{dy}{dx} - 5x^2 y = 0$
$$\ln|y| = \frac{5}{3}x^3 + c$$

2. $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos 2x$
$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

Example 49 *Resolver la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

solución

$$\frac{dy}{1-y^2} = dx$$

integrando

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx + c$$

reescribiendo el primer integrando por fracciones parciales

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{2\,(1+y)} + \frac{1}{2\,(1-y)}$$

por lo tanto

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y}$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}u &= 1+y,\ du = dy \\ v &= 1-y,\ dv = -dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{1-y^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|v| \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|1-y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \\ &= \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos la solución implícita

$$\ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = x + c$$

Exercise 50 *Resolver la ecuación diferencial*

$$x\sin y dx + (x^2+1)\cos y dy = 0$$

solución

$$\begin{aligned} x\sin y dx &= -(x^2+1)\cos y dy \\ \frac{x}{x^2+1}dx &= -\frac{\cos y}{\sin y}dy \end{aligned}$$

integrando

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = -\int \cot y dy$$

haciendo el cambio de variable

$$u = x^2+1;\;\; du = 2xdx$$

tenemos que la primera integral resulta

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| = -\ln|\sin y| + \ln c$$

reescribiendo la solución

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{x^2+1} + \ln|\sin y| &= \ln c \\ \ln\sqrt{x^2+1}\,|\sin y| &= \ln c \\ \sqrt{x^2+1}\,|\sin y| &= c \end{aligned}$$

Tarea 3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables

1. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = y\sin x$
3. $2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = (64xy)^{\frac{1}{3}}$
5. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2y$
6. $y' = xy^3$

7. $y^3 \frac{dy}{dx} = (y^4+1)\cos x$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3-y)}$

9. $y' = 1 + x + y + xy$

10. $dx + e^{3x} dy = 0$

11. $\frac{dy}{dx} = e^{-3x+2y}$

12. $\frac{dy}{dx} = (\frac{2y+3}{4x+5})^2$

13. $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

14. $\sec^2 x dy + \csc y dx = 0$

15. $e^y \sin 2x dx + \cos x(e^{2y} - y) dy = 0$

2.2 Ecuaciones con coeficientes homogéneos

Definition 51 *Una función $f(x,y)$ se dice **homogénea de grado** n si*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Example 52 *La función $f(x,y) = 2x + \sqrt{3xy} - y$ es una función homogénea de grado $n = 1$, ya que*

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= 2tx + \sqrt{3(tx)(ty)} - ty = 2tx + \sqrt{3t^2xy)} - ty \\ &= t(2x + \sqrt{3xy} - y) = tf(x,y) \end{aligned}$$

Example 53 *La función $f(x,y) = \sqrt[3]{2x^2 - y^2}$ es una función homogénea de grado $n = \frac{2}{3}$, ya que*

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \sqrt[3]{2(tx)^2 - (ty)^2} = \sqrt[3]{2t^2x^2 - t^2y^2} \\ &= \sqrt[3]{t^2(2x^2 - y^2)} = t^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{2x^2 - y^2} = t^{\frac{2}{3}} f(x,y) \end{aligned}$$

Example 54 *La función $f(x,y) = x^2 - 5xy^2 + 2$ no es una función homogénea, ya que*

$$f(tx,ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty)^2 + 2 = t^2x^2 - 5t^3xy^2 + 2 \neq t^n f(x,y)$$

Remark 55 *Si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n, entonces podemos escribir*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^n f(1, \frac{y}{x}) \\ f(x,y) &= y^n f(\frac{x}{y}, 1) \end{aligned}$$

Definition 56 *Una ecuación diferencial tiene la forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogeneas del mismo grado n, entonces la ecuación se denomina ***ecuación con coeficientes homogéneos.***

Solution 57 *El método de solución consiste en reducir la ecuación con coeficientes homogéneos a una ecuación de variables separables empleando la sustitución*

$$y = ux, \ dy = xdu + udx$$

de esta forma obtenemos

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(xdu + udx) = 0$$

De la observación (remark) anterior logramos

$$\begin{aligned} x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)(xdu + udx) &= 0 \\ M(1,u)dx + N(1,u)xdu + N(1,u)udx &= 0 \\ [M(1,u) + N(1,u)u]dx + N(1,u)xdu &= 0 \end{aligned}$$

donde finalmente resulta la ecuación de variables separables

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u) + N(1,u)u}du$$

Example 58 *Resolver la siguiente ecuación con coeficientes homogéneos*

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Observamos primeramente que $M(x,y) = x^2 + y^2$ y $N(x,y) = x^2 - xy$ son funciones homogéneas de grado $n = 2$, por lo que la ecuación referida es una ecuación con coeficientes homogéneos. Luego

$$\begin{aligned} M(1,u) &= 1^2 + u^2 = 1 + u^2 \\ N(1,u) &= 1^2 - 1u = 1 - u \end{aligned}$$

donde $u = \frac{y}{x}$. Sustituyendo en la ecuación de variables separables

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1-u}{1 + u^2 + (1-u)u}du$$

o bien

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1-u}{u+1}du = \frac{u-1}{u+1}du$$

sumando y restando 2 en el numerador del segundo miembro

$$\begin{aligned}\frac{u-1+2-2}{u+1}du &= \frac{u+1-2}{u+1}du \\ &= (\frac{u+1}{u+1}-\frac{2}{u+1})du = du-\frac{2}{u+1}du\end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x} &= \int du-2\int\frac{du}{u+1}+c \\ \ln|x| &= u-2\ln|u+1|+c\end{aligned}$$

regresando a las variables originales, obtenemos la solución

$$\ln|x| = \frac{y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+c$$

Example 59 *Resolver la siguiente ecuación con coeficientes homogéneos*

$$x\frac{dy}{dx} = y+xe^{\frac{y}{x}}$$

reescribiendo la ecuación

$$(y+xe^{\frac{y}{x}})dx-xdy=0$$

Observamos primeramente que $M(x,y) = y+xe^{\frac{y}{x}}$ y $N(x,y) = -x$ son funciones homogéneas de grado $n=1$, por lo que la ecuación referida es una ecuación con coeficientes homogéneos. Luego

$$\begin{aligned}M(1,u) &= u+1e^{\frac{u}{1}} = u+e^u \\ N(1,u) &= -1\end{aligned}$$

donde $u=\frac{y}{x}$. Sustituyendo en la ecuación de variables separables

$$\frac{dx}{x} = -\frac{-1}{u+e^u-1u}du$$

o bien

$$\frac{dx}{x} = e^{-u}du$$

finalmente integrando y regresando a las variables originales

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x} &= \int e^{-u}du+c \\ \ln|x| &= -e^{\cdot u}+c\end{aligned}$$

regresando a las variables originales, obtenemos la solución

$$\ln|x| = -e^{\cdot\frac{y}{x}}+c$$

Example 60 *Resolver la siguiente ecuación con coeficientes homogéneos*

$$(2\sqrt{xy}-y)dx-xdy=0$$

Observamos primeramente que $M(x,y)=2\sqrt{xy}-y)$ *y* $N(x,y)=-x$ *son funciones homogéneas de grado* $n=1$*, por lo que la ecuación referida es una ecuación con coeficientes homogéneos. Luego*

$$\begin{aligned} M(1,u) &= 2\sqrt{1u}-u=2\sqrt{u}-u \\ N(1,u) &= -1 \end{aligned}$$

donde $u=\frac{y}{x}$*. Sustituyendo en la ecuación de variables separables*

$$\frac{dx}{x}=-\frac{-1}{2\sqrt{u}-u-1u}du$$

o bien

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\sqrt{u}-2u}du$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{u},\ dt=\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{du}{2t} \\ t^2 &= u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2t-2t^2}(2tdt) \\ &= \frac{1}{1-t}dt \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{1}{1-t}dt-\ln c \\ \ln|x| &= -\ln|1-t|-\ln c \\ \ln|x| &= \ln\frac{c}{|1-t|} \\ x &= \frac{c}{1-t}=\frac{c}{1-\sqrt{u}} \end{aligned}$$

finalmente, la solución resulta

$$x=\frac{c}{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Exercise 61 *Resolver las siguientes ecuaciones con coeficientes homogéneos*

1. $(y^2+yx)dx-x^2dy=0$

2. $2x^2ydx = (3x^3 + y^3)dy$

Tarea 4. Resolver las siguientes ecuaciones con coeficientes homogéneos

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$
2. $2ydx - xdy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
8. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

2.3 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definition 62 *Una ecuación diferencial de la forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*se denomina **ecuación diferencial exacta** si y sólo si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Example 63 *Demostrar que la siguiente ecuación diferencial es exacta*

$$(4xy^3 + 3y^2 + 1)dx + (6x^2y^2 + 6xy)dy = 0$$

Identificando tenemos que

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 4xy^3 + 3y^2 + 1 \\ N(x, y) &= 6x^2y^2 + 6xy \end{aligned}$$

luego observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(4xy^3 + 3y^2 + 1) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(1) \\ &= 4x\frac{\partial}{\partial y}(y^3) + 3\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(1) = 4x(3y^2) + 3(2y) + 0 \\ &= 12xy^2 + 6y \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2 + 6xy) = 6y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 6y\frac{\partial}{\partial x}(x) \\
&= 6y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 6y\frac{\partial}{\partial x}(x) = 6y^2(2x) + 6y(1) \\
&= 12xy^2 + 6y
\end{aligned}$$

de este modo se demuestra que la ecuación diferencial es exacta.

Example 64 *Demostrar que la siguiente ecuación diferencial es exacta*

$$(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

Identificando tenemos que

$$\begin{aligned}
M(x, y) &= 3x^2y + e^y \\
N(x, y) &= x^3 + xe^y - 2y
\end{aligned}$$

luego observamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + e^y) = 3x^2\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^y) \\
&= 3x^2 + e^y
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + xe^y - 2y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + e^y\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(-2y) \\
&= 3x^2 + e^y
\end{aligned}$$

de este modo se demuestra que la ecuación diferencial es exacta.

Exercise 65 *Demostrar que la siguientes ecuaciones diferenciales son exactas*

1. $(\cos x \cos y + 2x)dx - (\sin x \sin y + 2y)dy$
2. $(e^x \sin y - 3x^2)dx + (e^x \cos y + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}})dy = 0$
3. $\cos x dy - (y \sin x - e^x)dx = 0$
4. $(ye^{xy} - \frac{1}{y})dx + (xe^{xy} + \frac{x}{y^2})dy = 0$
5. $(2x + \frac{y}{1+x^2y^2})dx + (\frac{x}{1+x^2y^2} - 2y)dy = 0$

El **método de solución** de las EDO Exactas se resume en los siguientes cuatro puntos:

I. Demostrar que la ecuación es efectivamente exacta, es decir, comprobar que la ecuación cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

II. Construir la solución de la ecuación mediante

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

III. Derivar parcialmente f con respecto y e igualarla a N

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

IV. Despejar la función g y sustituirla en f. Finalmente, la solución de la ecuación exacta resulta de igualar f con la constante c.

$$f(x, y) = c$$

Example 66 *Resolver la ecuación exacta del ejemplo 1*

$$(4xy^3 + 3y^2 + 1)dx + (6x^2y^2 + 6xy)dy = 0$$

I. La ecuación resulta exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy^2 + 6y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

II. Integrando M respecto a x

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int M(x, y)dx + g(y) \\ &= \int (4xy^3 + 3y^2 + 1)dx + g(y) = \int 4xy^3 dx + \int 3y^2 dx + \int dx + g(y) \\ &= 4y^3 \int x dx + 3y^2 \int dx + \int dx + g(y) = 4y^3(\frac{x^2}{2}) + 3y^2 x + x + g(y) \\ &= 2x^2y^3 + 3y^2x + x + g(y) \end{aligned}$$

III. Derivando f respecto a y e igualándola a N

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2x) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(g(y)) \\ &= 2x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^3) + 3x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + x\frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{dg}{dy} \\ &= 2x^2(3y^2) + 3x(2y) + 0 + \frac{dg}{dy} = 6x^2y^2 + 6xy + \frac{dg}{dy} = 6x^2y^2 + 6xy \end{aligned}$$

IV. Despejando $g(y)$

$$\begin{aligned}
6x^2y^2 + 6xy + \frac{dg}{dy} &= 6x^2y^2 + 6xy \\
\frac{dg}{dy} &= 0
\end{aligned}$$

Si la derivada de $g(y)$ es igual a cero, necesariamente $g(y)$ debe ser igual a una constante k

$$g(y) = k$$

finalmente, la solución de la ecuación exacta resulta

$$2x^2y^3 + 3y^2x + x + k = c$$

o bien

$$2x^2y^3 + 3y^2x + x = b$$

donde la constante $b = c - k$.

Example 67 *Resolver la ecuación exacta del ejemplo 2*

$$(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

I. La ecuación resulta exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

II. Integrando M respecto a x

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\
&= \int (3x^2y + e^y)dx + g(y) = \int 3x^2y dx + \int e^y dx + g(y) \\
&= 3y\int x^2 dx + e^y \int dx + g(y) = 3y(\frac{x^3}{3}) + e^y(x) + g(y) \\
&= yx^3 + xe^y + g(y)
\end{aligned}$$

III. Derivando f respecto a y e igualándola a N

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(yx^3 + xe^y + g(y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(yx^3) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}(g(y)) = x^3\frac{\partial}{\partial y}(y) + x\frac{\partial}{\partial y}(e^y) + \frac{dg}{dy} \\
&= x^3(1) + x(e^y) + \frac{dg}{dy} = x^3 + xe^y + \frac{dg}{dy} = x^3 + xe^y - 2y
\end{aligned}$$

IV. Despejando $g(y)$

$$\begin{aligned} x^3 + xe^y + \frac{dg}{dy} &= x^3 + xe^y - 2y \\ \frac{dg}{dy} &= -2y \\ \int dg &= -2\int y dy \\ g(y) &= -2y \end{aligned}$$

finalmente, la solución de la ecuación exacta resulta

$$yx^3 + xe^y - 2y = c$$

Tarea 5. Determine cúales de las siguientes ecuaciones son exactas, las que resulten resuélvalas aplicando el método de cuatro pasos.

1. $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$
2. $(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$
6. $(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$
7. $(e^x \sin y + 3y)dx + (3x + e^x \cos y)dy = 0$
8. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0$
9. $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (\ln x - 2)dy = 0$
10. $(x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0$
11. $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

2.4 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

De acuerdo con lo estudiado en la unidad I, una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

donde $a_1(x) \neq 0$, $a_0(x)$, $g(x)$ son funciones de x. Dividiendo la ecuación entre $a_1(x)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

donde $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},\ f(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$.

El **método de solución** de las EDO lineales de primer orden se resume como sigue:

I. Reescribir la EDO lineal de primer orden en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

II. Obtener el **factor integrante** $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

III. La solución a la EDO lineal finalmente se obtiene de

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) f(x) dx + \frac{c}{\mu(x)}$$

Example 68 *Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden*

$$x\frac{dy}{dx} + (2x+1)y = xe^{-2x}$$

I. Reescribiendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + (\frac{2x+1}{x})y = e^{-2x}$$

donde identificamos $P(x) = \frac{2x+1}{x},\ f(x) = e^{-2x}$.

II. Obtenemos el factor integrante $\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\
&= e^{\int (\frac{2x+1}{x})dx} = e^{2\int dx + \int \frac{dx}{x}} = e^{2x+\ln x} \\
&= e^{2x}e^{\ln x} = xe^{2x}
\end{aligned}$$

III. La solución a la EDO lineal finalmente se obtiene de

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) f(x) dx + \frac{c}{\mu(x)} \\
&= \frac{1}{xe^{2x}} \int xe^{2x}e^{-2x} dx + \frac{c}{xe^{2x}} = \frac{1}{xe^{2x}} \int x dx + \frac{c}{xe^{2x}} \\
&= \frac{1}{xe^{2x}}(\frac{x^2}{2}) + \frac{c}{xe^{2x}} = \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{c}{xe^{2x}}
\end{aligned}$$

La solución resulta

$$y = \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{c}{xe^{2x}}$$

Example 69 *Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden*

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+6xy=x$$

I. Reescribiendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx}+(\frac{6x}{x^2-1})y=\frac{x}{x^2-1}$$

donde identificamos $P(x)=\frac{6x}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

II. Obtenemos el factor integrante $\mu(x)$

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int P(x)dx}\\ &= e^{\int \frac{6x}{x^2-1}dx}\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}u &= x^2-1\\ du &= 2xdx\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{3\int \frac{2xdx}{x^2-1}}=e^{3\int \frac{du}{u}}\\ &= e^{3\ln u}=e^{\ln u^3}=u^3\\ &= (x^2-1)^3\end{aligned}$$

III. La solución a la EDO lineal finalmente se obtiene de

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)f(x)dx+\frac{c}{\mu(x)}\\ &= \frac{1}{(x^2-1)^3}\int (x^2-1)^3\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{c}{(x^2-1)^3}\\ &= \frac{1}{(x^2-1)^3}\int x(x^2-1)^2dx+\frac{c}{(x^2-1)^3}\\ &= \frac{1}{(x^2-1)^3}\int (x-2x^3+x^5)dx+\frac{c}{(x^2-1)^3}\\ &= \frac{1}{(x^2-1)^3}[\int xdx-2\int x^3dx+\int x^5dx]+\frac{c}{(x^2-1)^3}\\ &= \frac{1}{(x^2-1)^3}[\frac{x^2}{2}-2(\frac{x^4}{4})+\frac{x^6}{6}]+\frac{c}{(x^2-1)^3}\end{aligned}$$

La solución resulta

$$y=\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}}{(x^2-1)^3}+\frac{c}{(x^2-1)^3}$$

Exercise 70 *Resuelva las siguientes EDO lineales de primer orden*

1. $ydx + (xy^2 + x - y)dy = 0$ (edo lineal en x)
2. $xdy + (xy + y - 1)dx = 0$
3. $(x^2 + x - 2)\frac{dy}{dx} + 3(x + 1)y = x - 1$
4. $x\frac{dy}{dx} + (\frac{2x+1}{x+1})y = x - 1$
5. $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t^2} = \frac{1}{t^2}$
6. $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$
7. $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$
8. $x^4\frac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$
9. $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 6x^2$

Tarea 6. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales siguientes

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
2. $2\frac{dy}{dx} + 10y = 1$
3. $\frac{dy}{dx} + y = \exp(3x)$
4. $y' + 3x^2y = x^2$
5. $(x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$
6. $xdy = (x \sin x - y)dx$
7. $\cos x\frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$
8. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
9. $\cos^2 x \sin x dy + (y \cos^3 x - 1)dx = 0$
10. $x\frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = \exp(-3x)$
11. $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$
12. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-\exp(-2x)}{\exp x+\exp(-x)}$
13. $(x + 2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

2.5 Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial (no lineal) de la forma

$$\frac{dy}{dx} + r(x)y = s(x)y^n \quad (1)$$
$$; \ n \neq 2 \quad (2)$$

se denomina **Ecuación de Bernoulli**. Tal ecuación tiene la particularidad de que puede convertirse en una EDO lineal de primer orden realizando el cambio de variable $t = y^{1-n}$. Esto es

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^n}{1-n}\frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} \frac{y^n}{1-n}\frac{dt}{dx} + r(x)y &= s(x)y^n \\ \frac{dt}{dx} + (1-n)r(x)y^{1-n} &= (1-n)s(x) \\ \frac{dt}{dx} + p(x)t &= f(x) \end{aligned}$$

donde $p(x) = (1-n)r(x)$ y $f(x) = (1-n)s(x)$.
Método de solución de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + r(x)y = s(x)y^n$$

I. Construir la EDO lineal de primer orden

$$\frac{dt}{dx} + p(x)t = f(x)$$

donde

$$\begin{aligned} p(x) &= (1-n)r(x) \\ f(x) &= (1-n)s(x). \end{aligned}$$

II. Resolver la ecuación por el método del factor integrante $\mu(x)$

III. La solución resulta

$$y = t^{\frac{1}{1-n}}$$

Example 71 *Resolver la ecuación de Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

1. $r(x) = \frac{1}{x}$
   $s(x) = x$
   $n = 2$
   $t = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$
   $p(x) = (1-n)r(x) = (1-2)\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$
   $f(x) = (1-n)s(x) = (1-2)x = -x$

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x}t &= -x \\
\mu(x) &= \exp(-\int \frac{1}{x}dx) = \exp(\ln x^{-1}) = x^{-1} \\
t &= \frac{1}{x^{-1}}\int x^{-1}(-x)dx + \frac{c}{x^{-1}} \\
t &= -x^2 + cx \\
y &= (-x^2+cx)^{-1} = \frac{1}{-x^2+cx}
\end{aligned}$$

Example 72 *Resolver la ecuación de Bernoulli*

$$\begin{aligned}
3(1+x^2)\frac{dy}{dx} &= 2xy(y^3-1) \\
\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2}y &= \frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2}y^4
\end{aligned}$$

1. $r(x) = s(x) = \frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2}$
   $n = 4$
   $t = y^{1-n} = y^{1-4} = y^{-3}$
   $p(x) = (1-n)r(x) = (1-4)\frac{2}{3}\frac{x}{1+x^2} = -\frac{2x}{x^2+1}$
   $f(x) = (1-n)s(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}t &= -\frac{2x}{x^2+1} \\
\mu(x) &= \exp(-\int \frac{2x}{x^2+1}dx) = \exp(-\ln(x^2+1)) = \frac{1}{(x^2+1)} \\
t &= (x^2+1)\int \frac{1}{(x^2+1)}[-\frac{2x}{x^2+1}]dx + c(x^2+1) \\
t &= (x^2+1)(x^2+1)^{-1} + c(x^2+1) = 1 + c(x^2+1) \\
y &= [\frac{1}{1+c(x^2+1)}]^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

2.6 Ecuación de Riccati

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = m(x) + n(x)y + q(x)y^2$$

se denomina **Ecuación de Riccati.** Tal ecuación tiene la conveniente propiedad de transformarse en una EDO lineal de primer orden haciendo la sustitución $y = y_1 + u$, donde y_1 es una solución particular de la ecuación de Ricatti. De este modo

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = m + n(y_1 + u) + q(y_1 + u)^2$$

reduciendo

$$\frac{du}{dx} - (n + 2y_1 q)u = qu^2$$

haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{u}$

$$\frac{dt}{dx} + p(x)t = f(x)$$

donde $p(x) = n(x) + 2y_1 q(x)$ y $f(x) = -q(x)$.

Método de solución de la Ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = m(x) + n(x)y + q(x)y^2$$

I. Construir la EDO lineal de primer orden

$$\frac{dt}{dx} + p(x)t = f(x)$$

donde

$$\begin{aligned} p(x) &= n(x) + 2y_1 q(x) \\ f(x) &= -q(x) \end{aligned}$$

II. Resolver la ecuación por el método del factor integrante $\mu(x)$

III. La solución resulta

$$y = y_1 + \frac{1}{t}$$

Example 73 *Resolver la ecuación de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2, \;\; y_1 = 2$$

$m(x) = -2$
$n(x) = -1$
$q(x) = 1$
$p(x) = n(x) + 2y_1 q(x) = -1 + 2(2)(1) = 3$
$f(x) = -q(x) = -(1) = -1$
El factor integrante resulta

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} \\ &= e^{\int 3dx} = e^{3x} \end{aligned}$$

de este modo

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{e^{3x}} \int e^{3x}(-1)dx + \frac{c}{e^{3x}} \\ &= -e^{-3x} \int e^{3x}dx + ce^{-3x} \\ &= -e^{-3x}(\frac{1}{3}e^{3x}) + ce^{-3x} = -\frac{1}{3} + ce^{-3x} \end{aligned}$$

finalmente, la solución resulta

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{1}{t} \\ &= 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}} \end{aligned}$$

Tarea 7. Resolver las siguientes ecuaciones de Bernoulli

1. $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$
2. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$
3. $x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$
5. $\frac{dy}{dx} + (\frac{x+1}{2x})y = \frac{x+1}{xy}$

Resolver las siguientes ecuaciones de Riccati

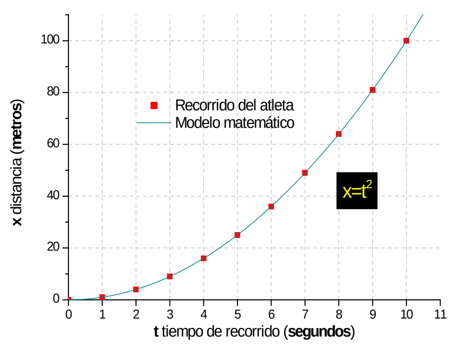
1. $\frac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2,\ y_1 = 1$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,\ y_1 = \frac{2}{x}$
3. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2,\ y_1 = -e^x$
4. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y \tan x + y^2,\ y_1 = \tan x$

3 Unidad. Aplicación de EDO de primer orden

En todas las ramas de las ciencias e ingenierías se recurre a las matemáticas como instrumento de descripción y predicción de fenómenos, en el diseño de dispositivos electrónicos e instrumentos de medición y en la elaboración de nuevos materiales. Las ecuaciones diferenciales particularmente modelan fenómenos físicos, biológicos, ambientales, industriales, etc. La noción de modelado se refiere a la descripción y predicción de un fenómeno o situación empleando como instrumento las matemáticas, en nuestro caso las ecuaciones diferenciales. Los siguientes casos son ejemplo de modelado matemático.

Example 74 *La descripción del inicio de recorrido de un atleta que compite en la maratón de Tokio, está dada por la siguiente tabla*

Tiempo t (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distancia x (metros)	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

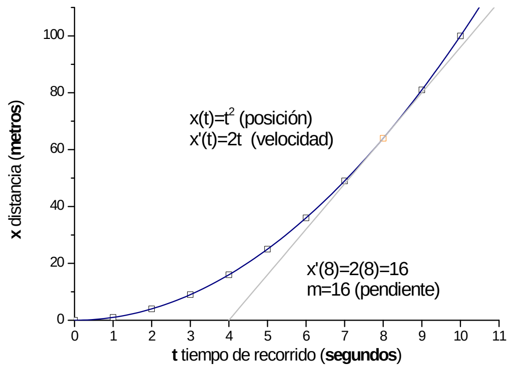


Modelo matemático del corredor de la maratón

El modelo matemático que describe el recorrido es

$$x = t^2$$

¿Cuál es la velocidad del atleta en cada instante?



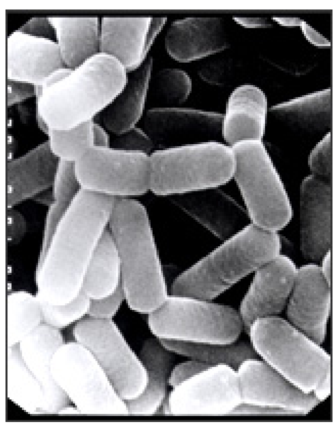
Velocidad del atleta a los 8 *segundos*

La velocidad en cada instante está dado por la derivada de la posición

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$$

3.1 Crecimiento bacteriano

Lactobacilo, Lactobacillus o bacteria del ácido láctico es un género de bacterias Gram positivas anaerobias facultativas, denominadas así debido a que la mayoría de sus miembros convierte lactosa y otros monosacáridos en ácido láctico.



Lactobacilo

Normalmente son benignas e incluso necesarias, habitan en el cuerpo humano y en el de otros animales, por ejemplo, están presentes en el tracto gastrointestinal. Muchas especies son importantes en la descomposición de material vegetal. La producción de ácido láctico hace que su ambiente sea ácido, lo cual inhibe el crecimiento de bacterias dañinas. Algunas especies de lactobacillus son usadas industrialmente para la producción de yogur y otros alimentos fermentados.

Example 75 *Un ingeniero en alimentos requiere estudiar el crecimiento de un determinado lactobacilo. Él sabe que trancurrida una hora el número de lactobacilos es* 1.5 *veces la cantidad inicial* N_0. *Si la rapidez de multiplicacción es proporcional al número de lactobacilos presentes* $N(t)$, *determinar el tiempo para el cual el número de lactobacilos se triplica.*

Solución
$N(t)$: *números de lactobacilos al tiempo* t
$N(0) = N_0$: *condición de frontera* 1
$N(1) = 1.5N_0$: *condición de frontera* 2
$\frac{dN}{dt}$: *rapidez de crecimiento o velocidad de multiplicación de los lactobacilos*
Modelo matemático

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

La ecuación diferencial resulta de variables separables

$$\begin{aligned} \int \frac{dN}{N} &= k\int dt \\ \ln N &= kt + c \\ N &= e^{kt+c} \end{aligned}$$

o bien

$$N(t) = Ae^{kt}$$

donde $A = e^c$. *Ahora, el trabajo será encontrar los valores de los parámetros* A *y* k. *Aplicando la condición de frontera* 1

$$N_0 = N(0) = Ae^{k(0)} = A$$

por lo que

$$N_0 = A$$

de este modo

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

por otra parte, aplicando la condición de frontera 2

$$1.5N_0 = N(1) = N_0 e^{k(1)}$$

despejando k

$$k = \ln(1.5) = 0.40547$$

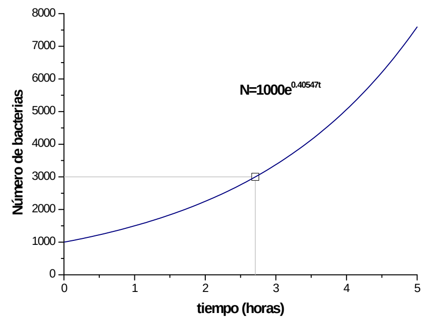
así, la solución sin parámetros de la ecuación resulta

$$N(t) = N_0 e^{0.40547t}$$

por lo tanto, el tiempo para el cual se triplica la población de lactobacilos es

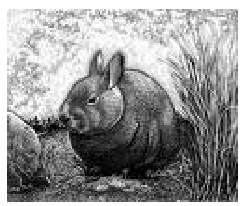
$$\begin{aligned} 3N_0 &= N_0 e^{0.40547t} \\ t &= \frac{\ln 3}{0.40547} = 2.7095\ hrs = 2\ hrs\ 42\ \text{min} \end{aligned}$$

Asumiendo que la cantidad inicial de lactobacilos fuera $N_0 = 1000$, entonces la gráfica se mostraría como



Modelo de crecimiento (exponencial) de los lactobacilos.

Problem 76 *Se sabe que cierta población de zacatuches o teporingos (roedores endémicos de la parte montañosa del centro del país) aumenta con una rapidez proporcional al número de individuos presentes en determinado instante. Si la población se cuatruplica en* 63 *días. Determinar el tiempo en que la población es* 100 *veces mayor.*



Zacatuche o teporingo

3.2 Ley de enfriamiento de Newton

La ley empírica de enfriamiento de una substancia, a temperatura ambiente, fue enunciada por Newton: "la rapidez con que la temperatura de un cuerpo cambia es proporcional a la diferencia de su temperatura $T(t)$ y la temperatura del medio T_a que lo rodea.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

Problem 77 *Un ingeniero metalúrgico requiere enfriar a temperatura ambiente el producto de fundición hierro colado-aluminio. Si la aleación muestra una temperatura inicial de* $1000\ C$ *y el termómetro ambiental marca* $20\ C$*.¿En qué tiempo la temperatura de la aleación será de* $600C$*? ¿Cuál será la temperatura de la aleación transcurridas* 2 *horas? La temperatura que registra la aleación transcurridos* 15 *mins es de* $910\ C$*.*

Solución
$T_A = 20$
Condiciones de frontera

$T(0) = 1000$
$T(15) = 910$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T-20) \\ \int \frac{dT}{T-20} &= k\int dt \\ \ln(T-20) &= kt + c \\ T(t) &= Ae^{kt} + 20 \end{aligned}$$

aplicando la primera condición de frontera

$$\begin{aligned} 1000 &= T(0) = Ae^{k(0)} + 20 \\ A &= 980 \end{aligned}$$

por la segunda condición

$$\begin{aligned} 910 &= T(15) = 980e^{k(15)} + 20 \\ k &= \frac{1}{15}\ln(\frac{910-20}{980}) = -0.006422 \end{aligned}$$

por lo tanto la solución a la ecuación será

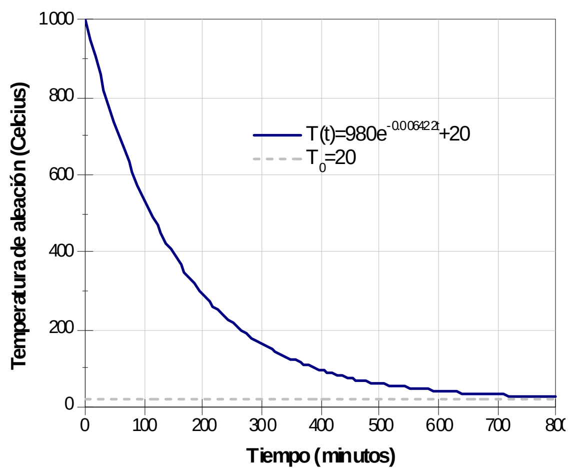
$$T(t) = 980e^{-0.006422t} + 20$$

para saber el tiempo en el que la temperatura de la aleación es igual a 600 C *hacemos*

$$\begin{aligned} 600 &= 980e^{-0.006422t} + 20 \\ t &= \frac{1}{-0.006422}\ln(\frac{600-20}{980}) = 81.676 \ \min s = 1hr \ 21\min \ 40seg \end{aligned}$$

ahora, la temperatura del cuerpo transcurridas $2 \ hrs = 120 \ \min s$ *es*

$$T(120) = 980e^{-0.006422(120)} + 20 = 473.46 \ C$$



Modelo matemático del enfriamiento de una aleación hierrocolado-aluminio.

3.3 Experimento "Cuánto esperar para tomar el café"

Objetivo. Corroborar la ley de enfriamiento de Newton experimentalmente utilizando café caliente.

Materiales.

1. Vaso desechable (plástico delgado, no unicel)
2. Termómetro (preferentemente de amplio rango $0-100\,C$. Puede adquirirse en distribuidoras de equipo para laboratorios)
3. Café caliente (aprox. $80\ C$. No rebasar la temperatura límite del termómetro usado, puede causar estallido en el bulbo si el termómetro funciona a base de mercurio)
4. Cronómetro
5. Bitácora

Diseño experimental.

Antes de todo se debe medir la temperatura ambiente del lugar donde se realizará el experimento. Se fija termómetro a vaso desechable con cinta adhesiva y éste a su vez a una mesa de trabajo. Se vacía café caliente al vaso hasta 3/4 de llenado. Es importante que el vaso quede libre de contacto con otros objetos que no sean el medio ambiente y la mesa de trabajo, esto para evitar un posible aislamiento térmico. (Se agregan al reporte un par de fotografías del diseño experimental)

Procedimiento experimental.

Con el cronómetro en cero, se mide la temperatura inicial $T(0)$ a la que se encuentra el café. De este modo, se registra gradualmente el tiempo (en minutos con decimales, por ejemplo, si el cronómetro marca 2 mins 18 segs se registra 2.3mins) por cada *dos grados Centígrados* durante el descenso de temperatura. El número de registros experimentales no deberá ser menor a 20.

Diseño experimental para "cuánto esperar para tomar el café"

Análisis de resultados.

Con el uso de un graficador (origin, excel, mathemática, matlab, etc) se plotean los resultados experimentales, temperatura versus tiempo, con escalas adecuadas y con etiquetas en la base y costado de la grafica (véase ejemplo de ploteo abajo). Por otra parte, se elige un registro cualquiera $(t_n, T(t_n))$ como condición de frontera y se establece el modelo

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T - T_A) \\ T(0) &= T_0 \\ T(t_n) &= T_n \end{aligned}$$

Si la condición de frontera no conduce a un modelo confiable, elegir otro registro $(t_n, T(t_n))$. Finalmente se plotea la solución en la grafica de registros experimentales y se observa si el modelo de la ley de enfriamiento de Newton es confiable en la descripción del descenso de temperatura de una taza de café.

Conclusiones.

Se discute si el modelo es adecuado en todo momento del enfriamiento. Además se deberá contestar las siguientes preguntas

¿Para qué rango de temperaturas el modelo se desvía apreciablemente de los resultados experimentales?

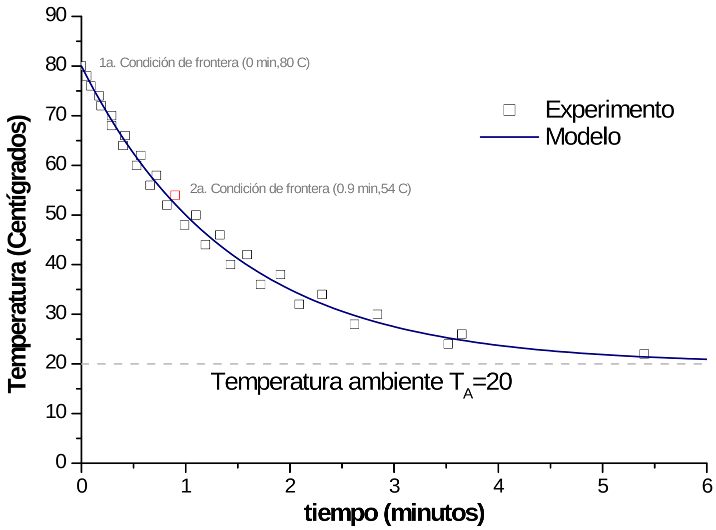
¿Cuál es la temperatura que alcanzará el café después de *cuatro minutos* según el modelo? ¿Cuál es la temperatura lograda en el experimento a ese tiempo? Calcula el error porcentual respecto al modelo.

¿Cuál es el tiempo en llegar a los 50 C según el modelo? ¿Cual es el tiempo obtenido en el experimento para esa temperatura? Calcula el error porcentual respecto al modelo.

Se anexan comentarios y opiniones de todos los integrantes del equipo.

El *reporte* del anterior experimento debe por lo menos contener:

1. Página de presentación (nombre del experimento, asignatura, equipo, etc)
2. Introducción (breve descripción de la ley de Newton)
3. Objetivo (finalidad del experimento)
4. Diseño experimental (materiales, breve descripción del diseño)
5. Registro de datos (tabla de registros experimentales, con unidades)
6. Análisis de resultados (gráficas de resultados más grafica del modelo, sobrepuestas para hacer el cotejo)
7. Conclusiones
8. Bibliografía



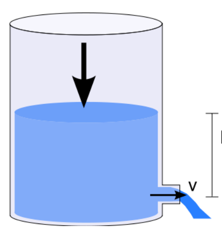
Ejemplo de ploteo experimento versus modelo matemático

3.4 Teorema de Torricelli

Suponga un líquido no viscoso e incompresible (agua) contenido en un recipiente que posee un orificio pequeño a una distancia y del nivel del líquido. La velocidad de salida del fluido por el orificio está dado por

$$v = \sqrt{2gy}$$

donde $g = 9.8\ m/s^2$ es la aceleración de la gravedad. Este resultado de la hidrodinámica se le denomina *teorema de Torricelli*.



Teorema de torricelli

Problem 78 *Un depósito cilíndrico sin tapa de* $1.5\ m$ *de diámetro y* $2\ m$ *de alto contiene etanol. Bajo el nivel de líquido, a* $1.8\ m$*, se encuentra un conducto tapado de* $2\ cm$ *de diámetro. Si se requiere drenar el depósito hasta que el nivel alcance* $1\ m$ *respecto del conducto,¿cuánto tiempo se necesita hacer fluir libremente el líquido? ¿Qué nivel mostrará el depósito si el etanol fluye durante* $30\,\mathrm{min}\,s$.

Solución

El diferencial del volumen que fluye por el tubo de desagüe es

$$\begin{aligned} dV &= \pi r^2 dx \\ &= \pi r^2 \sqrt{2gy} dt \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{dV}{dt} = -\pi r^2 \sqrt{2gy}$$

el signo negativo significa que el volumen va en disminución. Por otro lado, empleando la regla de la cadena para la variación de volumen respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dy}(\pi R^2 y)\frac{dy}{dt} \\ &= \pi R^2 \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

igualando estos últimos resultados

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g} y^{\frac{1}{2}}$$

Esta es una EDO no lineal, en particular, una ecuación de Bernoulli. Sin embargo, observamos que puede resolverse por el método de variables separables

$$\begin{aligned} \int y^{-\frac{1}{2}} dy &= -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\int dt \\ y^{\frac{1}{2}} &= -kt + c \end{aligned}$$

o bien, sabiendo que $k = \frac{r^2}{2R^2}\sqrt{2g}$

$$y(t) = (-kt + c)^2$$

ahora aplicando la condición de frontera

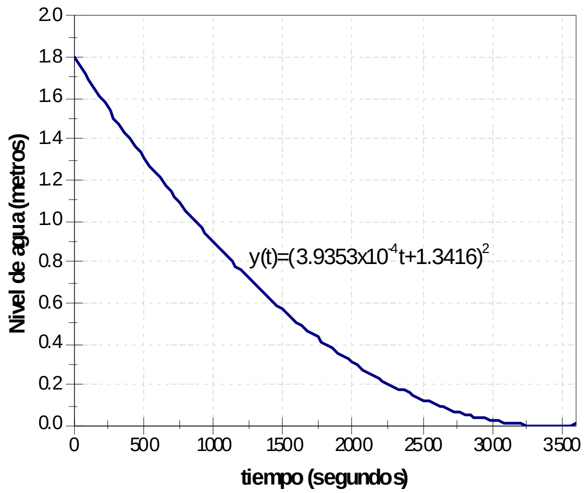
$$1.8 = y(0)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 1.8 &= y(0) = (-3.935\,3 \times 10^{-4}(0) + k)^2 \\ k &= \sqrt{1.8} = 1.341\,6 \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución particular de la EDO resulta

$$y(t) = (-3.935\,3 \times 10^{-4} t + 1.341\,6)^2$$



Nivel de etanol *versus* tiempo

Así, el tiempo requerido para drenar el etanol hasta un nivel de 1 m respecto del tubo de desagüe es

$$\begin{aligned} 1 &= (-3.935\,3\times 10^{-4}t+1.341\,6)^2 \\ t &= 868.04\ seg = 14\ \min\ 28\ seg \end{aligned}$$

y el nivel del etanol después de haberlo drenado 30 min resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= (-3.935\,3\times 10^{-4}(30*60)+1.341\,6)^2 \\ &= 0.401\,m \end{aligned}$$

como una observación importante, notamos que el tiempo de desagüe total es de

$$\begin{aligned} 0 &= (-3.935\,3\times 10^{-4}t+1.341\,6)^2 \\ t &= 3409.1\ seg = 56\ \min\ 49\ seg \end{aligned}$$

3.5 Ecuación logística

El crecimiento no acotado de una población está dado por

$$\frac{dN}{dt}=kN$$

este modelo poco realista no considera elementos que frenan en crecimiento de una población, tal como la competencia por alimento y espacio, enfermedades, depredadores, etc. Si consideramos que la tasa media de mortalidad es proporcional al número de individuos presentes N, entonces, la velocidad de crecimiento por individuo en una población resulta

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \text{tasa media de natalidad} - \text{tasa media de mortalidad}$$

o bien

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a - bN$$

donde a es la tasa media de natalidad y bN es la tasa media de mortalidad. Reescribiendo

$$\frac{dN}{dt} - aN = -bN^2$$

que resulta una EDO de Bernoulli. A esta ecuación se le denomina *función logística*

3.6 Solución de la ecuación logística

Identificando

$$\begin{aligned} s(t) &= -a \\ r(t) &= -b \\ n &= 2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} p(t) &= (1-n)s(t) = a \\ f(t) &= (1-n)s(t) = b \end{aligned}$$

la ecuación lineal resultante es

$$\frac{du}{dt} + au = b$$

el factor integrante

$$\mu(t) = e^{a\int dt} = e^{at}$$

por lo que

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)f(t)dt + \frac{c}{\mu(t)} \\ &= \frac{1}{e^{at}}\int e^{at}(b)dt + \frac{c}{e^{at}} \\ &= \frac{b}{e^{at}}(\frac{1}{a}e^{at}) + \frac{c}{e^{at}} \\ u &= \frac{b}{a} + ce^{-at} \end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned} N &= u^{\frac{1}{1-2}} \\ &= (\frac{b}{a} + ce^{-at})^{-1} \\ &= \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}} \end{aligned}$$

el problema está sujeto la condición de frontera

$$\begin{aligned} N_0 &= N(0) = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-a(0)}} \\ c &= \frac{1}{N_0} - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

por lo que la solución resulta

$$N(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + (\frac{1}{N_0} - \frac{b}{a})e^{-at}}$$

Remark 79 *Obsérvese que la población tiene un límite de crecimiento cuando el tiempo es muy prolongado*

$$N(t \to \infty) = \frac{a}{b}$$

Problem 80 *Un estudiante portador de virus de gripe regresa de vacaciones de semana santa a un campus aislado de UPVM con* 1000 *estudiantes. Si la rapidez con que el virus se propaga es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados* N*, sino también, al número de estudiantes no contagiados* $1000-N$*, determinar el número de estudiantes contagiados despues de* 9 *días. Se observa como condición de frontera que* $N(4) = 50$*.*

Solución

Sea N *el número de individuos enfermos en un instante cualquiera. El modelo matemático que resulta de la propagación del virus*

$$\frac{dN}{dt} = kN(1000 - N)$$

sujeta a la condición de frontera

$$N(0) = 1$$

reescribiendo la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = 1000kN - kN^2$$

identificamos

$$\begin{aligned} a &= 1000k \\ b &= k \end{aligned}$$

de este modo la función logística del problema resulta

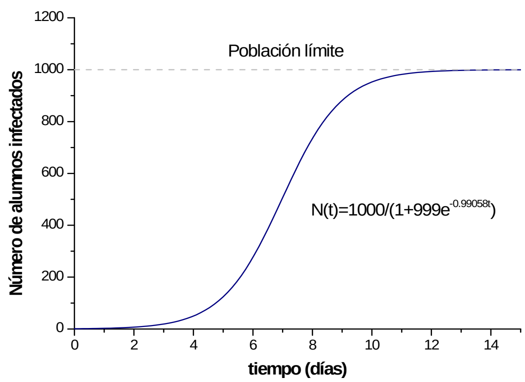
$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1}{\frac{k}{1000k} + (\frac{1}{1} - \frac{k}{1000k})e^{-1000kt}} \\ &= \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}} \end{aligned}$$

aplicando la condición de frontera

$$\begin{aligned} 50 &= N(4) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000k(4)}} \\ -1000k &= -0.99058 \end{aligned}$$

de este modo

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.99058t}}$$



Modelo de propagación de la gripe

Así, el número de estudiantes infectados por la gripe a los 9 días resulta

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1000}{1 + 999e^{-0.99058(9)}} \\ &= 881.68 \end{aligned}$$

Observamos que para un tiempo muy prolongado

$$N(t \to \infty) = 1000$$

como efectivamente sucedería si no hay cuarentena con los estudiantes contagiados.

3.7 Experimento "El tiempo a chorros"

Objetivos. Corroborar el modelo matemático (teorema de torricelli) que describe el flujo de agua de un recipiente a través de un conducto. Diseñar un reloj de agua.

Materiales.

1. Recipiente cilíndrico con capacidad para cinco litros de agua (es importante que el recipiente tenga el mismo diámetro interno en cualquier parte del cuerpo, que no posea endiduras o surcos en su contorno como los envases de refrescos)
2. Agua sin impuresas
3. Tubo cilíndrico (popote) de 2 cm de alto y 3 mm de diámetro interno aproximadamente (medir exactamente el diámetro con un vernier)
4. Cronómetro
5. Cinta métrica de papel graduada en milímetros
6. Pegamento silicón
7. Marcador permamente punto fino o mediano
8. Bitácora

Diseño experimental.

Realizar un orificio con ayuda de una punta metálica incandecente del tamaño del diametro del popote, que esté a 3 cm de la base del recipiente aproximadamente. Sellar cuidadosamente con silicón los intersticios entre el popote y la pared del recipiente para evitar fugas. Se pega la cinta métrica verticalmente a un costado del recipiente a modo de indicador del nivel de agua. Finalmente se vierte el agua al recipiente hasta un nivel inicial (el requerido para que tarde en fluir completamente el agua exactamente 10 **minutos**, véase abajo el ejemplo), esto con el cuidado de tapar previamente el conducto de salida (se agregan al reporte un par de fotografías del diseño experimental)

Procedimiento experimental.

Con el cronómetro en cero, se destapa el conducto y se registra gradualmente el nivel en milímetros (*nivel: altura del agua respecto al centro del orificio*) **cada treinta segundos** durante todo el desagüe. El nivel inicial debe elegirse de tal forma que se registren 20 datos experimentales.

Nivel de agua (en milímetros) $y(t)$	Tiempo (en segundos) t
$y(0) = L$	0
$y(30)$	30
$y(60)$	60
$y(90)$	90
$\vdots$	$\vdots$
$y(600) = 0$	600

Estos 20 niveles determinarán cada uno de los 30 segundos que tarda el agua en fluir completamente del recipiente. **Los niveles se indican en la cinta métrica empleando el marcador permanente**.

Análisis de resultados.

Con el uso de un graficador (origin, excel, mathemática, matlab, etc) se plotean los resultados experimentales, nivel de agua versus tiempo, con escalas adecuadas y con etiquetas en la base y costado de la grafica (véase ejemplo de ploteo abajo) y a la par, también se plotea el modelo matemático. Finalmente cotejando las gráficas se observa si el modelo matemático (teorema de Torricelli) es confiable en la descripción del del flujo de agua de un recipiente a través de un conducto.

Conclusiones.

Se discute si el modelo es adecuado en todo momento del desagüe. Además se deberá contestar las siguientes preguntas

¿Cuál será el nivel del agua despues de 8 min según el modelo? ¿Cuál es el nivel registrado en el experimento? Calcula el error porcentual respecto al modelo.

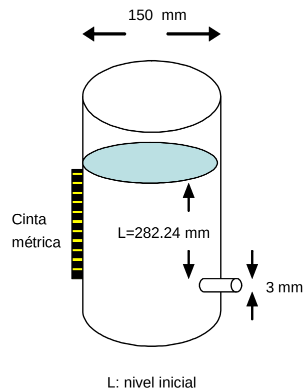
¿Cuál es el tiempo en llegar el agua a la mitad del nivel inicial L según el modelo? ¿Cuál es el tiempo obtenido en el experimento?. Calcula el error porcentual respecto al modelo.

Se anexan comentarios y **una opinión concensada** de todo el equipo de trabajo.

El *reporte* del anterior experimento debe por lo menos contener:

1. Página de presentación (nombre del experimento, asignatura, equipo, etc)
2. Introducción (breve descripción del teorema de Torricelli)
3. Objetivo (finalidad del experimento)
4. Diseño experimental (materiales, breve descripción del diseño)
5. Registro de datos (tabla de registros experimentales, con unidades)
6. Análisis de resultados (gráficas de resultados más gráfica del modelo, sobrepuestas para hacer el cotejo)
7. Conclusiones
8. Bibliografía

Considere un recipiente y tubo de desagüe con diámetros internos $R = 75\ mm$ y $r = 1.5\ mm$, respectivamente



De las dimensiones del dispositivo experiental tenemos que

$$-\frac{r^2}{2R^2}\sqrt{2g} = -\frac{1.5^2}{2(75)^2}\sqrt{2*9800} = -0.028$$

donde se ha empleado la aceleración de la gravedad $g = 9800\ mm/seg^2$. La solución a la ecuación diferencial que describe el descenso del nivel de agua a un tiempo t, se reduce por tanto a

$$y(t) = (-0.028t + k)^2$$

Para obtener k aplicamos la primera condición de frontera

$$\begin{aligned} L &= y(0) = (-0.028(0) + k)^2 \\ k &= \sqrt{L} \end{aligned}$$

donde L es el nivel inicial. Luego, aplicando la segunda condición de frontera (el nivel de agua cero al trancurrir $10\ \min = 600\ seg$)

$$\begin{aligned} 0 &= y(600) = (-0.028*600 + \sqrt{L})^2 \\ L &= 282.24\ mm \end{aligned}$$

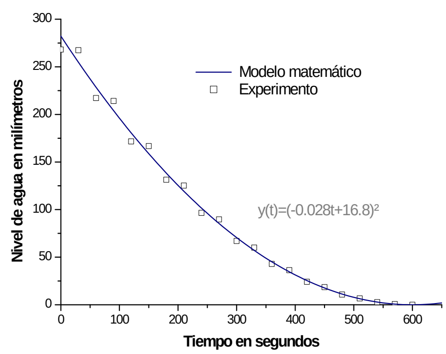
Finalmente el modelo matemático resulta

$$y(t) = (-0.028t + 16.8)^2$$

Los resultados experimentales obtenidos para el flujo de agua durante $10\ \min$ son

Tiempo (seg)	Experimento Nivel de agua (mm)	Modelo Nivel de agua (mm)
0	268.13	282.24
30	267.46	254.72
60	217.18	228.61
90	214.11	203.92
120	171.60	180.63
150	166.70	158.76
180	131.38	138.30
210	125.21	119.25
240	96.53	101.61
270	89.65	85.38
300	67.03	70.56
330	60.01	57.15
360	42.90	45.16
390	36.30	34.57
420	24.13	25.40
450	18.52	17.64
480	10.73	11.29
510	6.67	6.35
540	2.68	2.82
570	0.74	0.71
600	0.00	0.00

El ploteo de los resultados experimentales versus el modelo matemático se muestra como sigue



Al observar el ajuste confiable (error no mayor al 5%) del modelo respecto al experimento, concluimos que el dispositivo experimental puede utilizarse satisfactoriamente como un instrumento de medición del tiempo según el nivel de agua, esto es, como un **reloj de agua.**

4 Unidad. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

4.1 Elaboración de una segunda solución a partir de una solución conocida para ecuaciones lineales homogenéas de segundo orden

Considérese la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Además supóngase que se conoce la solución $y_1 \neq 0$ en I de dicha ecuación. Si se asume $y_2 = uy_1$ como una segunda solución se tiene que

$$\begin{aligned} y_2' &= uy_1' + y_1u' \\ y_2'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + y_1u'' \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación homogenea

$$\begin{aligned} y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' &= 0 \\ y_1w' + (2y_1' + py_1)w &= 0 \end{aligned}$$

donde $w = u'$. Resolviendo la ecuación lineal resultante

$$\begin{aligned} w &= c_1 \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} \\ u &= c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2 \end{aligned}$$

haciendo $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$ y recordando que $y_2 = uy_1$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Example 81 *Halle una segunda solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden*

1. $y'' + 4y' = 0;\ y_1 = 1$
   $p(x) = 4$
   $$y_2 = (1) \int \frac{e^{-4\int dx}}{1^2} dx = -\frac{1}{4} e^{-4x}$$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x}$
   $p(x) = -4$
   $$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{4\int dx}}{(e^{2x})^2} dx = xe^{2x}$$

3. $y'' + 16y = 0;\ y_1 = \cos 4x$
   $p(x) = 0$

$$\begin{aligned} y_2 &= \cos 4x \int \frac{e^{-(0)\int dx}}{(\cos 4x)^2} dx = \cos 4x \int \sec^2 4x dx \\ &= \frac{1}{4}\cos 4x \tan 4x = \frac{1}{4}\cos 4x \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{1}{4}\sin 4x \end{aligned}$$

Tarea 8. Encuentre la segunda solución a las EDO de segundo orden homogéneas

1. $y'' - y = 0;\ y_1 = \cosh x$
2. $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$
3. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1 = x^4$
4. $xy'' + y' = 0;\ y_1 = \ln x$
5. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0;\ y_1 = x + 1$

4.2 Ecuaciones lineales homogeneas de segundo orden con coeficientes constantes

Sea la ecuación homogenea de segundo grado

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b, c son números reales. Ensayando la solución $y = e^{mx}$

$$\begin{aligned} y &= e^{mx} \\ y' &= me^{mx} \\ y'' &= m^2e^{mx} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación homogenea

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$am^2 + bm + c = 0$ se denomina *ecuación auxiliar o ecuación caracteristica.* Resolviendo esta ecuación obtenemos tres casos:

Caso 1. Las soluciones son reales y distintas, $m_1 \neq m_2$

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

Caso 2. Las soluciones son reales e iguales, $m_1 = m_2$

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$$

Caso 3. Las soluciones *complejas*, $m_1 = \alpha + i\beta$; $m_2 = \alpha - i\beta$ (*donde* $\sqrt{-1} = i$ es la unidad compleja)

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Example 82 *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes*

1. $2y'' - 5y' - 3y = 0$

$$\begin{aligned} 2m^2 - 5m - 3 &= 0 \\ m_1 &= -\frac{1}{2};\ m_2 = 3 \end{aligned}$$

la solución general es

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{3x}$$

2. $y'' - 10y' + 25y = 0$

$$\begin{aligned} m^2 - 10m + 25 &= 0 \\ m_1 &= m_2 = 5 \end{aligned}$$

la solución general es

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

3. $y'' + y' + y = 0$

$$\begin{aligned} m^2 + m + 1 &= 0 \\ m_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ m_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

la solución general es

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Example 83 *Resolver la ecuación homogenea* $y'' - 4y' + 13y = 0$ *sujeta a* $y(0) = -1,\ y'(0) = 2$

solución

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 13 &= 0 \\ m_1 &= 2 + 3i;\ m_2 = 2 - 3i \end{aligned}$$

la solución general es

$$y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x$$

aplicando la primera condición de frontera

$$-1 = y(0) = c_1 e^{2(0)} \cos 3(0) + c_2 e^{2(0)} \sin 3(0) = c_1$$

de modo que

$$\begin{aligned} y &= -e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x \\ y' &= e^{2x} (3 (\sin 3x) - 2 (\cos 3x) + 3c_2 (\cos 3x) + 2c_2 (\sin 3x)) \end{aligned}$$

aplicando la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned} 2 &= y''(0) = e^{2(0)} (3 (\sin 3(0)) - 2 (\cos 3(0)) + 3c_2 (\cos 3(0)) + 2c_2 (\sin 3(0))) = -2 + 3c_2 \\ c &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

la solución particular resulta

$$y = -e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x$$

Tarea 9. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogenéas. Posteriormente aplique las condiciones de frontera correspondientes para encontrar las soluciones particulares.

1. $y'' + 16y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$
2. $y'' - y = 0;\ y(0) = y'(0) = 1$
3. $y'' + 6y' + 5y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
4. $y'' - 8y' + 17y = 0;\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1$
5. $2y'' - 2y' + y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0;\ y(0) = 5,\ y'(0) = 10$
7. $y'' + y' + 2y = 0;\ y(0) = y'(0) = 0$
8. $4y'' - 4y' - 3y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$
9. $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$
10. $y'' + y = 0;\ y(\frac{\pi}{3}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{3}) = 2$

4.3 Ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogeneas. Variación de parámetros

Supóngase la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

Sea $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denominada *función complementaria*. Propongamos la *solución particular* a la ecuación no homogenea

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Exigiendo $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ obtenemos en la ecuación no homogénea

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

de estas dos últimas ecuaciones obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

cuyas soluciones resultan

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2f(x)}{w} \\ u_2' &= \frac{y_1f(x)}{w} \end{aligned}$$

donde $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ se denomina el wronskiano de y_1 y y_2.

De este modo obtenemos la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ y &= c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned}$$

Example 84 *Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones por el método de variación de parámetros.*

1. $y'' + y = \tan x$

   la ecuación auxiliar de la ecuación homogenea es

   $$m^2 + 1 = 0; \; m_1 = i, \; m_2 = -i$$

   la función complementaria es

   $$\begin{aligned} y_c &= c_1e^{(0)x}\cos x + c_2e^{(0)x}\sin x = c_1\cos x + c_2\sin x \\ y_1 &= \cos x; \; y_1' = -\sin x \\ y_2 &= \sin x; \; y_2' = \cos x \end{aligned}$$

   el wronskiano resulta

   $$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

luego

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\sin x \tan x}{1} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = -\sec x + \cos x \\ u_1 &= -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{\cos x \tan x}{1} = \sin x \\ u_2 &= -\cos x \end{aligned}$$

la solución particular es

$$y_p = \cos x(-\ln|\sec x + \tan x| + \sin x) + \sin x(-\cos x) = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

la solución general resulta

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

2. $y'' + y = \sec^2 x$

la ecuación auxiliar de la ecuación homogenea es

$$m^2 + 1 = 0;\ m_1 = i,\ m_2 = -i$$

la función complementaria es

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 e^{(0)x} \cos x + c_2 e^{(0)x} \sin x = c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ y_1 &= \cos x;\ y_1' = -\sin x \\ y_2 &= \sin x;\ y_2' = \cos x \end{aligned}$$

el wronskiano resulta

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

luegoluego

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\sin x \sec^2 x}{1} = -\sin x(\frac{1}{\cos x}) \sec x = -\sec x \tan x \\ u_1 &= -\sec x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{\cos x \sec^2 x}{1} = \sec x \\ u_2 &= \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

la solución particular es

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos x \sec x + \sin x \ln|\sec x + \tan x| \\ &= -1 + \sin x \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

la solución general resulta

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 1 + \sin x \ln|\sec x + \tan x|$$

3. $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea es

$$m^2 - 4 = 0;\ m_1 = 2,\ m_2 = -2$$

la función complementaria es

$$\begin{aligned} y_c &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \\ y_1 &= e^{2x};\ y_1' = 2e^{2x} \\ y_2 &= e^{\cdot -2x};\ y_2' = -2e^{-2x} \end{aligned}$$

el wronskiano resulta

$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

luego

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{e^{-2x}\frac{e^{2x}}{x}}{-4} = \frac{1}{4x} \\ u_1 &= \frac{1}{4}\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{e^{2x}\frac{e^{2x}}{x}}{-4} = -\frac{e^{4x}}{4x} \\ u_2 &= -\frac{1}{4}\int\frac{e^{4x}}{x}dx \end{aligned}$$

la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{4}\ln xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\int\frac{e^{4x}}{x}dx$$

la solución general resulta

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\ln x - \frac{1}{4}e^{-2x}\int\frac{e^{4x}}{x}dx$$

Tarea 10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden por el método de variación de parámetros

1. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$
2. $y'' - y = xe^x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
3. $y'' + y = \cot x$

4. $y'' + y = \sec x$

5. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$

6. $y'' - 2y' + 5y = e^x \tan 2x$

7. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-x}}{x^3}$

8. $y'' - 2y' + y = xe^x \ln x$

4.4 Ecuación de Cauchy-Euler

La ecuación diferencial de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

donde $a_k,\ k = 0, 1, ..., n$ son constantes, se denomina *ecuación de Cauchy-Euler o ecuación equidimensional.* En esta unidad se estudiará el caso particular $n = 2$, es decir

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Método de solución:
Se propone la solución $y = x^m$ a la ecuación homogénea. Esto es

$$\begin{aligned} ax^2 m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m &= \\ x^m(am(m-1) + bm + c) &= 0 \end{aligned}$$

la función propuesta es solución para las raíces de la *ecuación característica*

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

Caso I. Si $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R}$. Entonces la función complementaria sería

$$y_c = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Caso II. Si $m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$. Entonces la función complementaría sería

$$y_c = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

donde se ha obtenido la segunda solución empleando $y_2 = x^m \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{(x^m)^2} dx$ a partir de la forma reescrita $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{b}{ax} \frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2} y = 0$ y con el hecho de que $m = -\frac{b-a}{2a}$

Caso III. Si $m_1 = \alpha + \beta i,\ m_2 = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$. La función complementaria resulta

$$y_c = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación no homegénea resulta $y = y_c + y_p$ donde la solución particular y_p se obtiene por el método de variación de parámetros

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{ax^2 w} \qquad\qquad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{ax^2 w}$$

Example 85 *Resolver las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler por el método de variación de parámetros.*

1. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

   Las soluciones ecuación característica

   $$2m^2 + (5-2)m + 1 = 0$$

   son $m_1 = -1,\ m_2 = -\frac{1}{2}$. *La función complementaria resulta*

   $$y_c = c_1x^{-1} + c_2x^{-\frac{1}{2}}$$

   Por otra parte

   $$\begin{aligned} y_1 &= x^{-1} & y_1' &= -x^{-2} \\ y_2 &= x^{-\frac{1}{2}} & y_2' &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ f(x) &= x^2 - x \end{aligned}$$

   el wronskiano resulta

   $$w = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-\frac{1}{2}} \\ -x^{-2} & -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

   De este modo

   $$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{x^{-\frac{1}{2}}(x^2 - x)}{\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}2x^2} = x - x^2 \\ u_1 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

   y

   $$\begin{aligned} u_2' &= \frac{x^{-1}(x^2 - x)}{\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}2x^2} = x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} \\ u_2 &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

   Por lo tanto la solución general a la ecuación de Cauchy- Euler resulta

   $$\begin{aligned} y &= c_1x^{-1} + c_2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) + x^{-\frac{1}{2}}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) \\ &= c_1x^{-1} + c_2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x \end{aligned}$$

2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$

Las soluciones ecuación característica

$$m^2 + (-2-1)m + 2 = 0$$

son $m_1 = 1,\ m_2 = 2$. *La función complementaria resulta*

$$y_c = c_1x + c_2x^2$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} y_1 &= x & y_1' = 1 \\ y_2 &= x^2 & y_2' = 2x \\ f(x) &= x^3 \ln x \end{aligned}$$

el wronskiano resulta

$$w = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

De este modo

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{x^2x^3 \ln x}{x^2x^2} = -x \ln x \\ u_1 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{xx^3 \ln x}{x^2x^2} = \ln x \\ u_2 &= x \ln x - x \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general a la ecuación de Cauchy- Euler resulta

$$\begin{aligned} y &= c_1x + c_2x^2 + x(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x) + x^2(x \ln x - x) \\ &= c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{3}{4}x^3 \end{aligned}$$

Tarea 11. Resolver las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler por el método de variación de parámetros

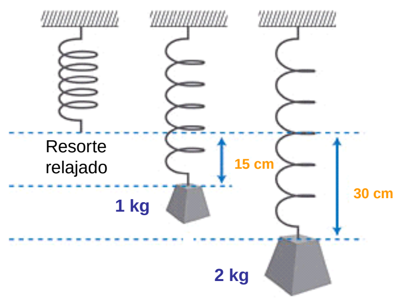
1. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 4x - 6$
2. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$
3. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$
4. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
5. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$
6. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 1 + 2x + x^2$
7. $x^2y'' + 9xy' - 20y = \frac{5}{x^3}$
8. $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$

5 Unidad. Aplicación de EDO de orden superior

5.1 Oscilador armónico simple

5.1.1 Ley de Hooke

Suponga un resorte sujeto al techo. Si se pende una pesa de un kilogramo el resorte se elongara 15 cm. Duplicando el peso a 2 kg el resorte se estira 30 cm, es decir el doble de la elongación anterior.



Podemos establecer que la elongación x del resorte es proporcional a la fuerza F que actúa al deformarlo

$$F = -kx$$

donde k, la constante de proporcionalidad, indica la rigidez del resorte (a mayor rigidez, mayor k). A esta propiedad mecánica se le conoce como *la ley de Hooke. El signo menos indica que la fuerza ejercida por el resorte es opuesta al desplazamiento.*

5.1.2 Segunda ley de Newton. Fuerza y aceleración

Consideremos el ejemplo del atleta de la unidad anterior. La *posición* del atleta respecto del tiempo estaba dada por

$$x(t) = t^2$$

establecimos que la *velocida*d con la que corría estaba dada por la derivada de la posición

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$$

observamos que la velocidad del atleta es variable y depende del tiempo. Por ejemplo, la velocidad a los 4 y 10 segundos será (en metros sobre segundos)

$$\begin{aligned} x'(4) &= 2(4) = 8 \\ x'(10) &= 2(10) = 20 \end{aligned}$$

La magnitud física que describe la variación de la velocidad en el tiempo se denomina *aceleración* y se obtiene derivando la velocidad, o equivalentemente mediante la *segunda derivada de la posición*

$$x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

para el caso del atleta, la aceleración es constante

$$x''(t) = 2$$

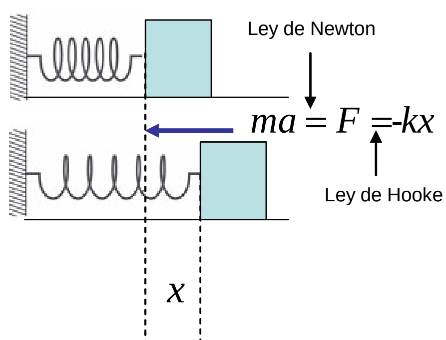
La aceleración es una magnitud que indica qué tan rápido cambia la velocidad en un lapso de tiempo de un cuerpo que se mueve. La relación entre la aceleración de un cuerpo y la fuerza que la provoca fue establecida por Issac Newton:

"La aceleración a que experimenta un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza F neta que la produce, siendo la constante de proporcionalidad la masa m del cuerpo"

$$F = ma$$

5.1.3 Oscilador armónico simple

Suponga un dispositivo consistente de un cuerpo de masa m atado a un resorte, y éste a su vez fijado a una pared. Si desplazamos el objeto, el resorte ejercerá sobre él una fuerza proporcional al desplazamiento (ley de Hooke).



de aquí que la ecuación diferencial que rige el movimiento del objeto es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

o bien

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ se denomina *frecuencia angular* y el doble punto sobre la equis indica la segunda derivada respecto al tiempo. El dispositivo se denomina *oscilador armónico simple.* La solución de la anterior ecuación diferencial se reduce a la solución de la ecuación característica

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

esto es

$$\begin{aligned} m_1 &= -i\omega \\ m_2 &= i\omega \end{aligned}$$

de este modo, el modelo matemático que describe el movimiento del oscilador armónico simple resulta

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

La cacacterística principal del movimiento oscilatorio es su periodicidad. El período T se define como el tiempo en que tarda el cuerpo en recorrer un ciclo completo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Example 86 *Un oscilador armónico simple consistente de una masa de* 300 *gr sujeta a un resorte de constante* $k = 6\ \frac{N}{m}$, *se desplaza* 10 *cm y se suelta desde el reposo. Obtener la ecuación de movimiento empleando las condiciones de frontera. ¿cuál es la posición y velocidad de la masa a los* 2 *segundos? ¿cuál es su período?*

solución:
condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$m = 300\ gr = 0.3\ kg$
$k = 6\ \frac{kg}{m}$
$\omega = \sqrt{\frac{6}{0.3}} = 4.472\,1$
la solución general resulta pues

$$x(t) = c_1 \cos 4.472\,1t + c_2 \sin 4.472\,1t$$

aplicando la primera condición de frontera

$$\begin{aligned} 0.1 &= x(0) = c_1 \cos 4.472\,1(0) + c_2 \sin 4.472\,1(0) \\ c_1 &= 0.1 \end{aligned}$$

de este modo

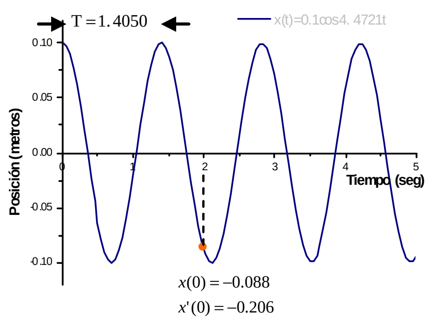
$$\begin{aligned} x(t) &= 0.1 \cos 4.472\,1t + c_2 \sin 4.472\,1t \\ \dot{x}(t) &= -0.447\,21 \sin 4.472\,1t + c_2 4.472\,1 \cos 4.472\,1t \end{aligned}$$

aplicando la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(t) = -0.447\,21 \sin 4.\,472\,1(0) + c_2 4.\,472\,1 \cos 4.\,472\,1(0) \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

así, la solución particular del oscilador armónico simple es

$$x(t) = 0.1 \cos 4.\,472\,1t$$



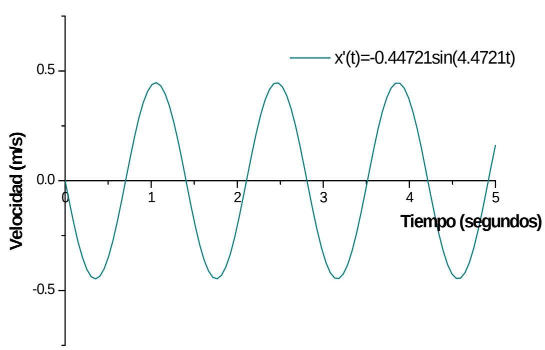
Posición del oscilador armónico simple

La posición a los 2 segundos

$$\begin{aligned} x(2) &= 0.1 \cos 4.\,472\,1(2) \\ &= -0.088 \end{aligned}$$

la velocidad a ese tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(2) &= -0.4472\,1 \sin 4.472\,1(2) \\ &= -0.206\,74 \end{aligned}$$



El período del oscilador es

$$T = \frac{2\pi}{4.\,472\,1} = 1.\,405\,0$$

Tarea 11. Resolver los siguientes problemas sobre osciladores armónicos

1. Un cuepo que pesa 200 *gr* estira un resorte 6 *cm*. Dicho cuerpo se suelta en $t = 0$ desde un punto que está 8 *cm* bajo la posición de equilibrio, con una velocidad hacia arriba de 2 m/s. Determinar la función $x(t)$ que describe el movimiento libre resultante. ¿Cuál es la velocidad en los puntos de amplitud máxima? ¿Cuál es la velocidad en la posición de equilibrio $x = 0$?

2. Un resorte está suspendido de un techo. Cuando el resorte se le fija en su extremo libre un cuerpo que pesa 30 *kg*, se estira 15 *cm*. Se le quita dicho cuerpo y una persona, asiéndose del extremo del resorte, empieza a oscilar verticalmente con un período de 1 *s*. ¿Cuánto pesa la persona?

3. Una fuerza de 400 N estira un resorte 2 m. Una masa de 50 *kg* se sujeta al extremo del resorte y se le suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 10 m/s.Halle la ecuación de movimiento.

5.2 Oscilador armónico amortiguado

Al actuar una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del oscilador, la ecuación de movimiento resulta

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

reescribiendo

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

que resulta una EDOL2 homogénea, donde $\gamma = b/2m$ el *constante de amortiguación*. Resolviendo

$$m^2 + 2\gamma m + \omega^2 = 0$$

ecuación caracteristica con soluciones

$$\begin{aligned} m_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \\ m_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Caso 1 ($\gamma > \omega$). Las soluciones son reales y distintas, $m_1 \neq m_2$

$$x = a_1 e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + a_2 e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$$

haciendo $a_1 = (c_1 + c_2)/2,\ a_2 = (c_1 - c_2)/2$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \cosh\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t + c_2 \sinh\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t) \quad \text{(sobreamortiguado)}$$

$e^{-\gamma t}$ *factor de amortiguación.*

Caso 2 ($\gamma = \omega$). Las soluciones son reales e iguales, $m_1 = m_2 = -\gamma$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t) \qquad \text{(criticamente amortiguado)}$$

Caso 3 ($\gamma < \omega$). Las soluciones *complejas*, $m_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$; $m_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$

$$x = e^{-\gamma t}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t)$$

haciendo $c_1 = A\sin\phi$, $c_2 = A\cos\phi$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \phi) \qquad \text{(subamortiguado)}$$

$Ae^{-\gamma t}$ *amplitud de amortiguación*, ϕ *fase.*

Example 87 *Un oscilador armónico con masa de* 200 *gr y constante de resorte* 0.8 N/m *se sumerge en tres sustancias viscosas con distintas constantes de amortiguamiento (*$b = 0.1, 0.8, 2$ (kg/s)*). Se estira* 12 *cm desde la posición de equilibrio y se deja oscilar desde el reposo. Obtenga las ecuaciones de movimiento en cada caso y distinga el tipo de amortiguamiento (sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado). Finalmente gráfique y realice un análisis comparativo.*

Solución

frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.8\ N/m}{0.2\ kg}} = 2\ seg^{-1}$$

condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.12 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

a) $b = 0.1$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.1\ kg/s}{2 * 0.2\ kg} = 0.25\ seg^{-1}$$

subamortiguado ($\gamma < \omega$*)*

$$x(t) = Ae^{-0.25t}\sin(1.9843t + \phi)$$

aplicando la primera condición

$$\begin{aligned} 0.12 &= x(0) = Ae^{0}\sin(1.9843(0) + \phi) \\ &= A\sin\phi \end{aligned}$$

aplicando la segunda

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(0) = 1.9843 A e^0 \cos(1.9843(0)+\phi) - 0.25 A e^0 \sin(1.9843(0)+\phi) \\ &= 1.9843 A \cos\phi - 0.25 A \sin\phi \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{1.9843}{0.25} \\ \phi &= 1.4455\ rad \\ A &= \frac{0.12}{\sin 1.4455} = 0.12095\ m \end{aligned}$$

solución particular

$$x(t) = 0.12095 e^{-0.25t} \sin(1.9843t + 1.4455)$$

b) $b = 0.8$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.8\ kg/s}{2 * 0.2\ kg} = 2\ seg^{-1}$$

críticamente amortiguado $(\gamma = \omega)$

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$$

aplicando la primera condición

$$\begin{aligned} 0.12 &= x(0) = e^0(c_1 + c_2(0)) \\ c_1 &= 0.12 \end{aligned}$$

aplicando la segunda

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(0) = c_2 e^0 - 2e^0(0.12 + c_2(0)) \\ c_2 &= 0.24 \end{aligned}$$

solución particular

$$x(t) = e^{-2t}(0.12 + 0.24t)$$

c) $b = 2$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{2\ kg/s}{2 * 0.2\ kg} = 5\ seg^{-1}$$

sobreamortiguado $(\gamma > \omega)$

$$x(t) = e^{-5t}(c_1 \cosh\sqrt{21}t + c_2 \sinh\sqrt{21}t)$$

aplicando la primera condición

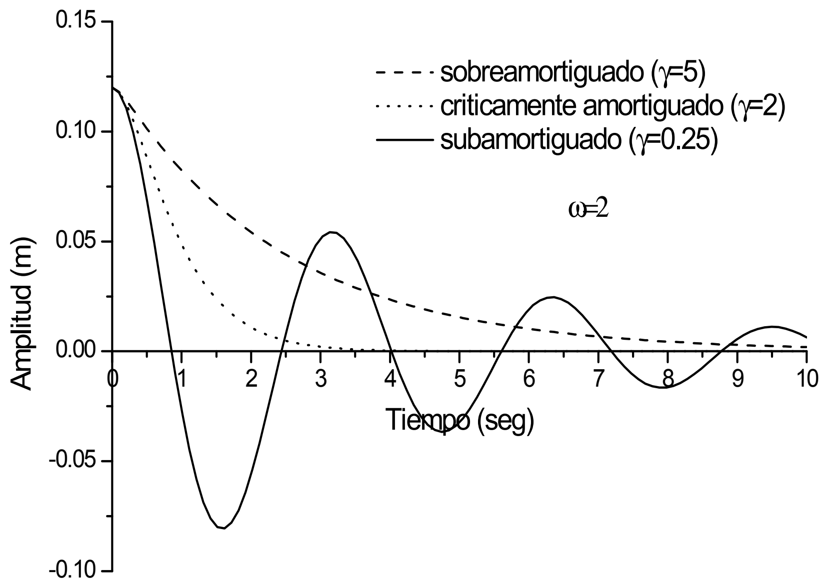
$$\begin{aligned} 0.12 &= x(0) = e^0(c_1 \cosh\sqrt{21}(0) + c_2 \sinh\sqrt{21}(0)) \\ c_1 &= 0.12 \end{aligned}$$

aplicando la segunda

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(0) = e^0(c_1\sqrt{21}\sin\sqrt{21}(0) + c_2\sqrt{21}\cosh\sqrt{21}(0)) \\ &\quad -5e^0(c_1\cosh\sqrt{21}(0) + c_2\sinh\sqrt{21}(0)) \\ c_2 &= \frac{5c_1}{\sqrt{21}} = 0.130\,93 \end{aligned}$$

solución particular

$$x(t) = e^{-5t}(0.12\cosh\sqrt{21}t + 0.13\sinh\sqrt{21}t)$$



5.3 Oscilador armónico forzado con amortiguamiento. Resonancia

Un oscilador amortiguado puede estar sujeto a una fuerza periodica externa

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F\cos\omega t$$

reescribiendo la ecuación de movimiento

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

donde $e^{i\alpha t} = \cos\alpha t + i\sin\alpha t$ ecuación de Euler, $z = x + iy$ variable compleja. Se propone la solución

$$z = RFe^{i\omega t}$$

que debe satisfacer

$$((i\omega)^2 + 2\gamma(i\omega) + \omega_0^2)RF = \frac{F}{m}$$

o bien

$$\begin{aligned} R &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma\omega i}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)} \\ &= |R|\, e^{-i\theta} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \frac{1}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^2} \\ \tan\theta &= -\frac{\operatorname{Im} R}{\operatorname{Re} R} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

la solución resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}(|R|\, e^{-i\theta} F e^{i\omega t}) \\ &= |R|\, F \cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

1.

6 Unidad. Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. La *transformada de Laplace* se define

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Example 88 *Calcular* $\mathcal{L}\{1\}$

Sea $f(t) = 1$, entonces

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = [-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^\infty = (-0 + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s}, \ s \geq 0$$

Sea $f(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$, entonces la transformada de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha g(t) + \beta h(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha g(t) + \beta h(t))dt = \int_0^\infty e^{-st}(\alpha g(t)) + \int_0^\infty e^{-st}(\beta h(t))dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} g(t) + \beta \int_0^\infty e^{-st} h(t)dt = \alpha \mathcal{L}\{g(t)\} + \beta \mathcal{L}\{h(t)\} \end{aligned}$$

es decir, la transformada de Laplace es una *operación lineal.*

Example 89 *Calcular* $\mathcal{L}\{t\}$

Sea $f(t) = t$, entonces integrando por partes

$u = t, \ du = dt$

$dv = e^{-st}dt, \ v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\frac{1}{s}e^{-st})dt \\ &= \left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Example 90 *Calcular* $\mathcal{L}\{e^{-4t}\}$

Sea $f(t) = e^{-4t}$*, entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-4t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+4)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s+4}e^{-(s+4)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+4}, \ s > -4 \end{aligned}$$

Example 91 *Calcular* $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$

Sea $f(t) = \sin 2t$*, entonces integrando por partes*

$u = \sin 2t, \ du = 2\cos 2t dt$

$dv = e^{-st}dt, \ v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin 2t dt = \left[-\frac{\sin 2t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\frac{1}{s}e^{-st})(2\cos 2t dt)dt \\ &= \left[-\frac{\sin 2t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t dt = \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t dt \end{aligned}$$

integrando por partes nuevamente
$u = \cos 2t,\ du = -2\sin 2tdt$
$dv = e^{-st}dt,\ v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^\infty e^{-st}\cos 2tdt &= \left[-\frac{\cos 2t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \textstyle\int_0^\infty (-\frac{1}{s}e^{-st})(-2\sin 2tdt)dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\textstyle\int_0^\infty e^{-st}\sin 2tdt = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\mathcal{L}\{\sin 2t\}\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s}(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}\mathcal{L}\{\sin 2t\}) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

despejando $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4},\ s > 0$$

Resumen de Transformadas de Laplace

i) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

ii) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$

iii) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

iv) $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$

v) $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

vi) $\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$

vii) $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

viii) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$

ix) $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

x) $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

xi) $\mathcal{L}\{e^{at}\sinh bt\} = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$

xii) $\mathcal{L}\{e^{at}\cosh bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

Example 92 *Calcular* $\mathcal{L}\{2e^{-4t} - 6\sin 2t\}$

Empleando el hecho de que la tranformación de Laplace es una operación lineal, tenemos

$$\mathcal{L}\{2e^{-4t} - 6\sin 2t\} = 2\mathcal{L}\{e^{-4t}\} - 6\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s+4} - \frac{12}{s^2+4}$$

Example 93 *Calcular* $\mathcal{L}\{t^2e^{3t} + (t+1)^3\}$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} + \mathcal{L}\{3t + 3t^2 + t^3 + 1\} \\
= & \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} + 3\mathcal{L}\{t\} + 3\mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{1\} \\
= & \frac{2}{(s-3)^3} + 3\frac{1!}{s^{1+1}} + 3\frac{2!}{s^{2+1}} + \frac{3!}{s^{3+1}} + \mathcal{L}\{1\} \\
= & \frac{2}{(s-3)^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Tarea 13. Obtener la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para cada función $f(t)$

1. $f(t) = e^{t+7}$
2. $f(t) = e^{-2t-5}$
3. $f(t) = te^{4t}$
4. $f(t) = t^2e^{3t}$
5. $f(t) = e^{-t}\sin t$
6. $f(t) = e^t\cos t$
7. $f(t) = (t+1)^3$
8. $f(t) = (1+e^{2t})^2$
9. $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$
10. $f(t) = e^t\sinh 2t$
11. $f(t) = t(e^t + e^{2t})^2$
12. $f(t) = \frac{\cosh t}{e^t}$

6.1 Transformada inversa de Laplace

Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ la transformada de Laplace. La transformada inversa se define

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Example 94

Transformada	*Transformada inversa*
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$1 = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$
$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$t = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}$
$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$	$e^{-3t} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\}$

Algunas transformadas inversas

1. $1 = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$
2. $t^n = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\},\ n = 1, 2, 3, ...$
3. $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}$
4. $\sin kt = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\}$
5. $\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\}$
6. $\sinh kt = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2-k^2}\}$
7. $\cosh kt = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-k^2}\}$

Example 95 *Evaluar*

a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^5}\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4!}{s^{4+1}}\} = \frac{1}{4!}t^4 = \frac{t^4}{24}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+7}\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t$

c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-2s+6}{s^5+4}\} = -2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^5+4}\}+6\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^5+4}\} = -2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^5+2^2}\}+\frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^5+2^2}\} =$
$-2\cos 2t + 3\sin 2t$

Example 96 *Evaluar* $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\}$.

Empleando fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{16}{5\,(s-1)} + \frac{25}{6\,(s-2)} + \frac{1}{30\,(s+4)}\} \\
&= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+4}\} \\
&= -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ es una transformación lineal

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Sea $f'(t) = \frac{df}{dt}$. La transformada de Laplace de $f'(t)$ resulta

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt = \int_0^\infty e^{-st}df$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= e^{-st}f(t)]_0^\infty + s\int e^{-st}f(t)dt \\
&= -f(0) + s\int e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

La transformada de Laplace de $f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{df'}{dt}$ resulta

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df'}{dt} dt = \int_0^\infty e^{-st} df'$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= e^{-st} f'(t)]_0^\infty + s\int e^{-st} f'(t)dt \\
&= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t) = -f'(0) + s(-f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}) \\
&= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

En general puede demostrarse que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

6.2 Transformada de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Example 97 *Resolver la ecuación diferencial* $y' + 3y = 13\sin 2t,\ y(0) = 6$

Solución:

Tomando la transformada en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y' + 3y\} &= \mathcal{L}\{13\sin 2t\} \\
\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} &= 13\mathcal{L}\{\sin 2t\}
\end{aligned}$$

como $\mathcal{L}\{y'\} = -y(0) + s\mathcal{L}\{y\}$, *y* $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$, *tenemos*

$$-6 + s\mathcal{L}\{y\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13(\frac{2}{s^2+4})$$

Despejando $\mathcal{L}\{y\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{6}{s+3} + \frac{2}{s+3} + \frac{6-2s}{s^2+4} \\
&= \frac{8}{s+3} + \frac{6}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

aplicando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y\}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{8}{s+3} + \frac{6}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+4}\} \\
y &= 8\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} + 6\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+2^2}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\} \\
&= 8e^{-3t} + \frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\} - 2\cos 2t \\
&= 8e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t
\end{aligned}$$

Example 98 *Resolver la ecuación diferencial* $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

Solución:

Tomando la transformada en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 3(-y(0) + s\mathcal{L}\{y\}) + 2\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+4} \end{aligned}$$

aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y\} - s(1) - 5 - 3(-1 + s\mathcal{L}\{y\}) + 2\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+4} \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - s - 5 + 3 - 3s\mathcal{L}\{y\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+4} \end{aligned}$$

Despejando $\mathcal{L}\{y\}$

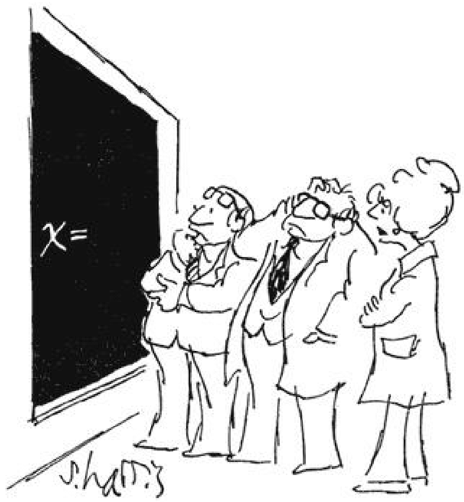
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{(s+4)(s^2-3s+2)} + \frac{s}{s^2-3s+2} + \frac{2}{s^2-3s+2} \\ &= \frac{25}{6\,(s-2)} - \frac{16}{5\,(s-1)} + \frac{1}{30\,(s+4)} \end{aligned}$$

aplicando la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y\}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{25}{6\,(s-2)} - \frac{16}{5\,(s-1)} + \frac{1}{30\,(s+4)}\} \\ y &= \frac{25}{6}e^{2t} - \frac{16}{5}e^{t} + \frac{1}{30}e^{-4t} \end{aligned}$$

Tarea 14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por el método de la Transformada de Laplace

1. $y'' - y' - 2y = 18e^{-t}\sin 3x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
2. $y'' + 2y' + y = te^{-2t};\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
3. $y'' + 7y' + 10y = 4te^{-3t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$
4. $y'' - 8y' + 15y = 9te^{2t};\ y(0) = 5,\ y'(0) = 10$
5. $y'' - y' - 2y = 18e^{-t}\sin 3t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
6. $y'' - y' = e^{t}\cos t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
7. $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
8. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$



FIN DEL CURSO

Autor M. en C. Omar Humberto Cruz Silva.