1 Unidad 1. Electrostática

1.1 Introducción.

Experimento:

- Barra de caucho+piel $(+)$
- Barra de vidrio+ tela de seda $(-)$

(convención de los signos sugerida por B. Franklin (1706-1790))

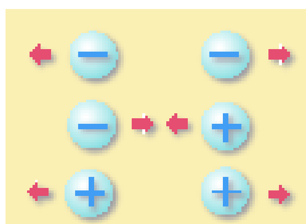
1.1.1 Ley de conservación de la carga

"*En todo proceso electrostático la carga total de un sistema aislado se conserva.*"

1.1.2 Cuantización de la carga.

Robert Millikan (1886-1955) experimentó que la carga de todo cuerpo es un *múltiplo de la carga fundamental* e.

$$\begin{aligned} q &= Ne \\ e &= 1.6019 \times 10^{-19} C \text{ (carga del electrón)} \end{aligned}$$



Interacción eléctrica

1.2 Ley de Coulomb

"La fuerza entre cargas puntuales es proporcional a su producto e inversamente proporcional al cuadrado de la separación entre ellas, actuando sobre la linea que las une".

$$\mathbf{F}_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\widehat{r}_{ij}$$

donde

$$\begin{aligned} k &= 9 \times 10^9 Nm^2/C^2 \\ q_i, q_j &: \text{ cargas puntuales } (C) \\ r_{ij} &: \text{ separación entre cargas } (m) \end{aligned}$$

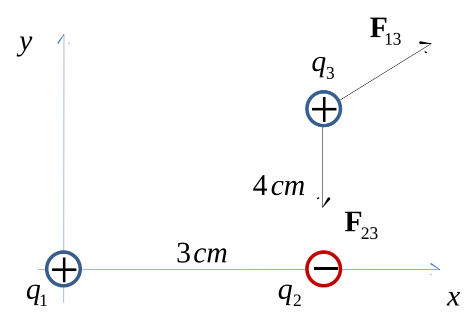
Remark 1 *Forma equivalente de la ley de Coulomb*

$$\mathbf{F}_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{12}$$

Remark 2 *Por la tercera ley de Newton*

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

Example 3 *Considere la siguiente distribución de cargas* $q_1 = 4\mu C,\ q_2 = -3\mu C,\ q_3 = 1\mu C$. *Determinar la fuerza resultante sobre* q_3.



Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13} &= 0.03\mathbf{i} + 0.04\mathbf{j} \qquad r_{13} = 0.05 \\ \mathbf{r}_{23} &= 0\mathbf{i} + 0.04\mathbf{j} \qquad r_{23} = 0.04 \end{aligned}$$

Por la ley de Coulomb

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{13} &= k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^3}\mathbf{r}_{13} \\ &= \frac{(9\times10^9)(4\times10^{-6})(1\times10^{-6})}{(0.05)^3}(0.03\mathbf{i}+0.04\mathbf{j}) = 8.64\mathbf{i} + 11.52\mathbf{j} \end{aligned}$$

de igual forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{23} &= k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^3}\mathbf{r}_{23} \\ &= \frac{(9\times10^9)(-3\times10^{-6})(1\times10^{-6})}{(0.04)^3}(0\mathbf{i}+0.04\mathbf{j}) = 0\mathbf{i} - 16.875\mathbf{j} \end{aligned}$$

la fuerza resultante

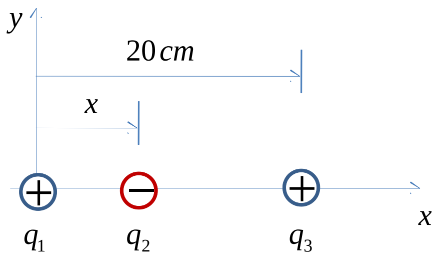
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} = (8.64\mathbf{i} - 5.355\mathbf{j})N$$

equivalentemente

$$F{=}10.165\ N \qquad \theta = 328.21°$$

Remark 4 *Obsérvese que se reserva el manejo de unidades hasta el final por simplicidad. En lo posterior esto se realizará sin la necesidad de especificarlo.*

Example 5 *Tres Cargas* $q_1 = 7\mu C,\ q_2 = -2\mu C,\ q_3 = 4\mu C$ *están sobre el eje* x *como se muestra. ¿En qué posición* x *debe situarse* q_2 *para que la fuerza resultante sobre ella sea cero?*



Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} \\ \implies & \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{32} \end{aligned}$$

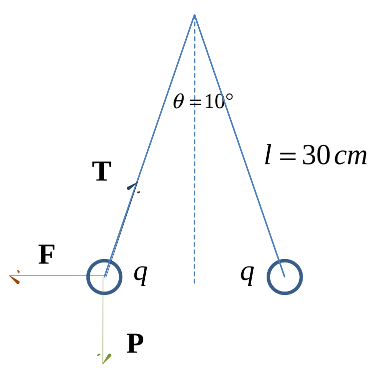
en magnitud las fuerzas son iguales

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_{32} \\ k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} &= k\frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \\ \frac{7}{x^2} &= \frac{4}{(0.2-x)^2} \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación

$$x = 0.113\,90\ m$$

Example 6 *Dos cargas puntuales de igual magnitud, cada una con masa* $m = 15\ gr$*, están suspendidas por hilos finos de longitud* $l = 30\ cm$ *describiendo un ángulo* $\theta = 10^\circ$ *como se muestra en el diagrama. Determine la carga* q *en cada esfera.*



Solución:
Por la interacción eléctrica

$$\mathbf{F} = k\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2}(-\mathbf{i}+0\mathbf{j})$$

donde la distancia r *entre las cargas*

$$r = 2l\sin\theta$$

por la tensión

$$\mathbf{T} = T\sin\theta\mathbf{i} + T\cos\theta\mathbf{j}$$

por el peso

$$\mathbf{P} = 0\mathbf{i} - mg\mathbf{j}$$

en la condición estática del sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{T}+\mathbf{F}+\mathbf{P}\\ &= (-k\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2} + T\sin\theta + 0)\mathbf{i} + (0 + T\cos\theta - mg)\mathbf{j}\end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}-k\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2} + T\sin\theta &= 0\\ T\cos\theta - mg &= 0\end{aligned}$$

por la segunda ecuación

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

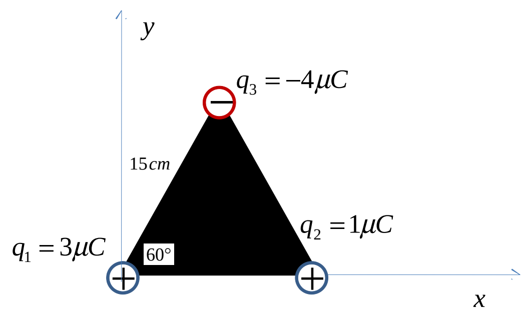
sustituyendo en la primera ecuación

$$-k\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2} + \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = 0$$

resolviendo para q

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\frac{4mgl^2\sin^3\theta}{k\cos\theta}}\\ &= \sqrt{\frac{4(0.015)(9.8)(0.3)^2\sin^3 10^\circ}{9\times 10^9\cos 10^\circ}} = 0.176\mu C\end{aligned}$$

Exercise 7 *Considere tres cargas puntuales ubicadas en los vértices de un triángulo equilatero, como se muestra. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre* q_2*?*



Exercise 8 *De la siguiente configuración en* $3D$*.¿Cuál es la fuerza resultante sobre* q_1*?*

carga	*ubicación*
$q_1 = -3\mu C$	$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
$q_2 = 2\mu C$	$\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$q_3 = 1\mu C$	$\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$q_4 = -4\mu C$	$\mathbf{r}_4 = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Hint. El vector que va de q_3 *a* q_1 *está dado por* $\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$.

1.3 Campo eléctrico

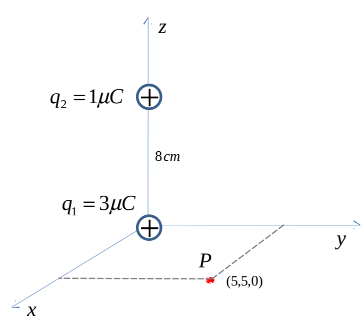
El campo eléctrico se define como la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba q_0 entre la magnitud de la carga de prueba.

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

El campo eléctrico producido por una carga q en el punto $\mathbf{r}$

$$\mathbf{E} = k\frac{q}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

Example 9 *Determinar el campo eléctrico en el punto* P *debido a las cargas* q_1, q_2.



Solución:
Notamos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= (0.05\mathbf{i} + 0.05\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \qquad r_1 = 0.07071 \\
\mathbf{r}_2 &= (0.05\mathbf{i} + 0.05\mathbf{j} - 0.08\mathbf{k}) \qquad r_2 = 0.106\,77
\end{aligned}$$

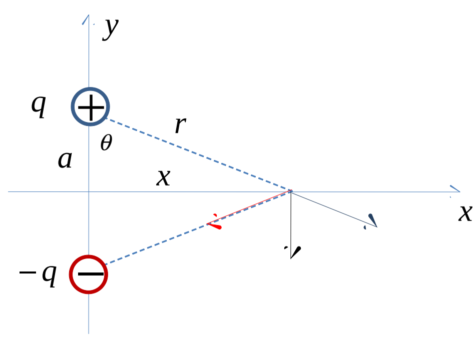
el campo eléctrico resultante

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\
&= k\frac{q_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 + k\frac{q_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2 \\
&= \frac{(9\times 10^9)(3\times 10^{-6})}{(0.07071)^3}(0.05\mathbf{i} + 0.05\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\
&\quad + \frac{(9\times 10^9)(1\times 10^{-6})}{(0.106\,77)^3}(0.05\mathbf{i} + 0.05\mathbf{j} - 0.08\mathbf{k})
\end{aligned}$$

finalmente

$$\mathbf{E} = (4.188\,2\mathbf{i} + 4.188\,2\mathbf{j} - 0.5915\,4\mathbf{k})MN/C$$

Example 10 *Determinar el campo electrico producido por un dipolo eléctrico a lo largo del eje x. (Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva q y otra negativa $-q$ separadas por una distancia $2a$.)*



Solución:
El campo elétrico resultante

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- \\
&= k\frac{q}{r^3}(r\sin\theta\mathbf{i} - r\cos\theta\mathbf{j}) + k\frac{-q}{r^3}(r\sin\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j}) \\
&= -2k\frac{q}{r^2}\cos\theta\mathbf{j}
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
r &= (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \\
\cos\theta &= \frac{a}{r}
\end{aligned}$$

tenemos

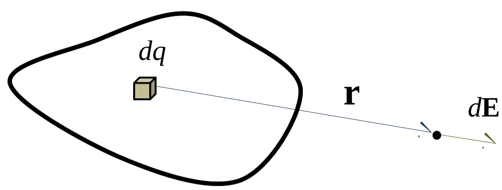
$$\mathbf{E} = -\frac{2kaq}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}$$

considerando que $a/x \approx 0$

$$\mathbf{E} \approx -\frac{2kaq}{x^3}\mathbf{j}$$

1.4 Campo eléctrico por una distribución continua de carga

Suponga una distribución de carga continua.



El campo eléctrico producido por un elemento dq de carga en $\mathbf{r}$ está dado por

$$d\mathbf{E} = k\frac{dq}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

sumando todas las contribuciones infinitesimales el campo eléctrico resultante

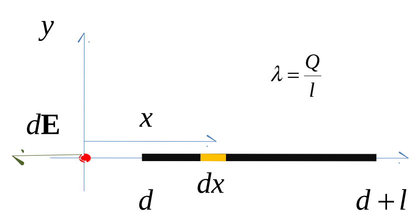
$$\mathbf{E} = k\int \frac{dq}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

la diferencial de carga dq está relacionada con la *densidades de carga volumétrica, superficial y lineal*

$$\begin{aligned} dq &= \rho dV \\ dq &= \sigma da \\ dq &= \lambda dl \end{aligned}$$

respectivamente.

Example 11 *Calcule el campo eléctrico debido a una barra de longitud l con carga neta Q, a una distancia d de un extremo de ella. Suponga una distribución lineal uniforme λ.*



Solución:
La diferencial de campo electrico

$$d\mathbf{E} = -k\frac{dq}{x^2}\mathbf{i}$$

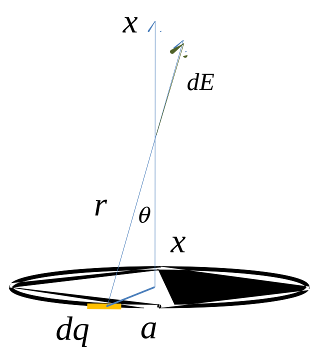
haciendo $dq = \lambda dx$ *e integrando*

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -k\int_d^{d+l}\frac{\lambda dx}{x^2}\mathbf{i} \\ &= -k\lambda(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l})\mathbf{i}\end{aligned}$$

sabiendo que $\lambda = Q/l$

$$\mathbf{E} = -\frac{kQ}{d(d+l)}\mathbf{i}$$

Exercise 12 *Determinar el campo eléctrico producido por un anillo de carga uniforme de radio* a*, sobre un punto situado sobre el eje* x*.*



Solución:
La diferencial de campo electrico

$$d\mathbf{E} = k\frac{dq}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

por la geometría de la distribución, la componente horizontal del campo eléctrico resultante es cero. Además

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} \\ r &= \sqrt{x^2+a^2}\end{aligned}$$

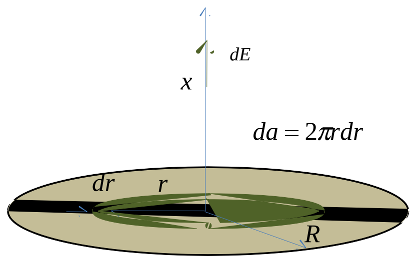
integrando sobre las componentes verticales y considerando $dq = \lambda ds$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \int d\mathbf{E}\cos\theta = k\int\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r}\mathbf{i} \\ &= \frac{k\lambda x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi a} ds\mathbf{i} \\ &= 2\pi a\lambda\frac{kx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}\end{aligned}$$

como $\lambda = Q/2a\pi$

$$\mathbf{E} = \frac{Qkx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}$$

Exercise 13 *Determinar el campo eléctrico producido por un disco de carga uniforme de radio* R*, sobre un punto situado sobre el eje* x*.*



Solución:
El diferencial campo eléctrico producido por un anillo

$$d\mathbf{E} = \frac{kxdq}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}$$

como $dq = \sigma da = 2\pi\sigma r dr$ *e integrando sobre todo el disco*

$$\mathbf{E} = 2\pi\sigma kx\int_0^R \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}$$

haciendo el cambio de variable

$$u = x^2 + r^2 \qquad du = 2rdr$$

tenemos

$$\mathbf{E} = 2\pi\sigma k(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})\mathbf{i}$$

Remark 14 *Un resultado importante surge cuando* $\frac{x}{R} \to 0$*, es decir cuando el punto* x *percibe al disco como un plano. (Emplee* $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$*)*

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

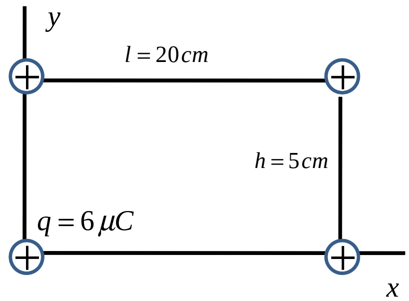
Ejercicios.

1. Dos cargas puntuales iguales de magnitud 2.0 μC se localizan sobre el eje x. Una está en $x = 1.0\ m$ y la otra está en $x = -1\ m$.

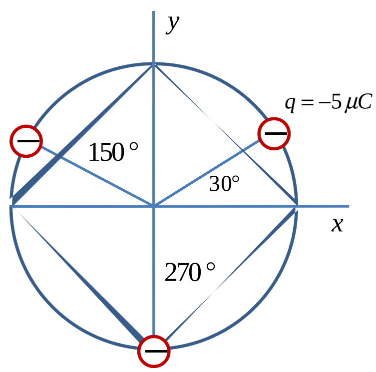
   (a) Determine el campo eléctrico sobre el eje y en $y = 0.5\ m$.

   (b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una tercera carga de $-3\mu C$ colocada sobre el eje y en $y = 0.5\ m$.

2. Cuatro cargas puntuales idénticas ($q = 6\ \mu C$) se colocan sobre un rectángulo de dimensiones $l \times h$ como se muestra. Calcule el campo electrico en el centro del rectángulo.

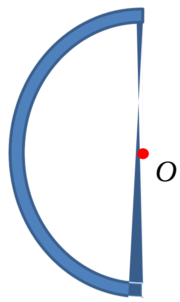


3. Tres cargas puntuales idénticas ($q = -5\ \mu C$) se localizan a lo largo de un círculo de 2 m de radio a ángulos de $30°, 150°, 270°$ como se muestra. Cuál es el campo eléctrico en el centro del círculo. del eje



4. Una carga de $-4\ \mu C$ está colocada en el origen, y una carga de $-5\ \mu C$ está colocada a lo largo del eje y en $y = 2.0\ m$. ¿En en qué punto a lo largo del eje y el campo eléctrico es cero?

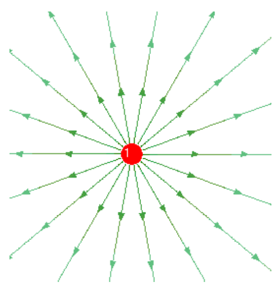
5. Una barra uniforme cargada de 14 cm se dobla para formar un semicírculo como se muestra. Si la barra tiene una carga total de $-7.5\ \mu C$, determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el centro del semicírculo.


O

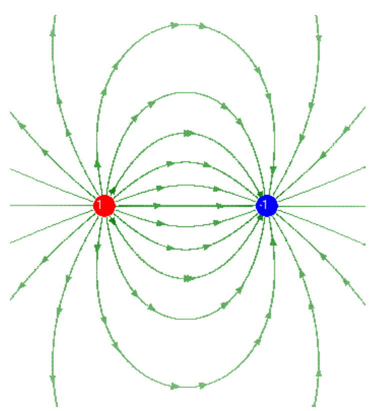
1.5 Lineas de campo eléctrico

El campo eléctrico puede visualizarse a través de las líneas de campo. Las líneas de campo cumplen lo siguiente:

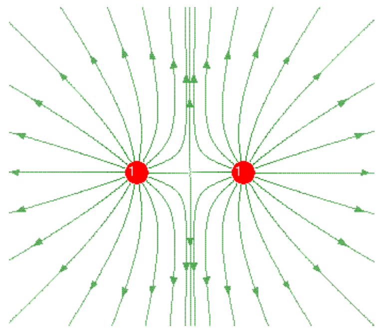
- Las líneas de campo salen de las cargas (o distribución) positivas y entran en las cargas negativas.
- La magnitud de campo electrico es proporcional al número de lineas de campo por unidad de sección transversal.
- El campo electrico es tangente a las líneas de campo.
- Las líneas de campo nunca se cruzan.



Líneas de campo eléctrico por carga puntual (+)



Líneas de campo electrico por un dipolo



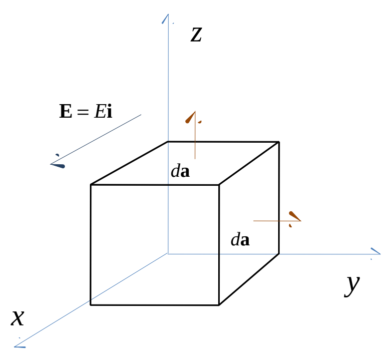
Lineas de campo eléctrico por cargas iguales

1.6 Flujo eléctrico

El **flujo electrico** es la medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie.

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Example 15 *Considere un campo eléctrico* **E** *uniforme en la dirección del eje* x*. Determine el flujo eléctrico a través del cubo de arista* l



Example 16 *Solución:*

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \\
&= \int_{\cdot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\times} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\leftarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\rightarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \\
&\quad + \int_{\uparrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\downarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}
\end{aligned}$$

observamos que

$$\int_{\leftarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\rightarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\uparrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\longrightarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ya que $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \mathbf{0}$. *Luego*

$$\int_{\cdot} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E\int_{\cdot} da = El^2$$

tambien

$$\int_{\times} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = -E\int_{\times} da = -El^2$$

de este modo

$$\Phi = 0$$

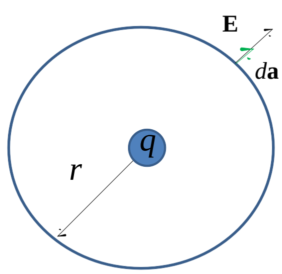
1.7 Ley de Gauss

La ley de Gauss establece *"El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga neta contenida dentro de ella"*. Esto es

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$ es la *permitividad del vacío.*

Example 17 *Aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico sobre una esfera de radio r en cuyo centro está situada una carga q.*



Solución:

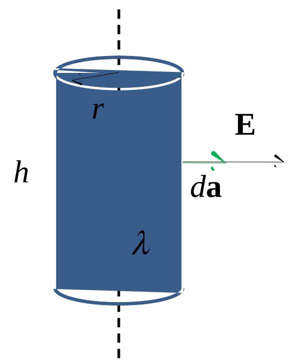
$$\begin{aligned} \frac{q}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \\ &= E\int da = E(4\pi r^2) \end{aligned}$$

despejando E

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

la ley de Coulomb!

Example 18 *Utilice la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico producido por una linea infinita con distribución de carga uniforme λ.*



Solución:

$$\begin{aligned}\frac{q}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{\uparrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_{\downarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_{\rightarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}\end{aligned}$$

observamos

$$\int_{\uparrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\downarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 0$$

luego

$$\int_{\rightarrow} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E\int_{\rightarrow} da = E(2\pi r h)$$

sabiendo que $\lambda = q/h$

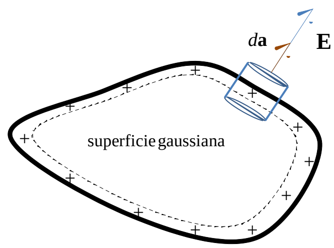
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

Un **conductor** es un material en el que residen electrones no ligados a los átomos y por lo tanto pueden moverse dentro del material bajo la acción de un campo electrico. Si el conductor está en equilibrio electrostático, entonces su carga neta está fija y no habrá corrientes eléctricas en él.

Example 19 *Calcular el campo eléctrico sobre la superficie externa de un conductor en equilibrio electróstático.*

Solución:

Considérese un conductor en equilibrio electrostático. Ensayando superficies gaussianas en su interior observamos, por la ley de Gauss, que no hay cargas en su interior (no existen compos eléctricos internos que generen corrientes eléctricas)



*Si no hay cargas dentro del conductor entonces las cargas residen **sobre** la superficie del mismo. Tal distribución superficial de carga σ genera un campo eléctrico **normal** a la superficie (cualquier componente tangencial del campo produciría corrientes sobre la superficie, cosa que no ocurre en el equilibrio electróstático.)*

Ensayemos sobre una superficie gaussiana que contenga una porción de superficie (pequeña lata de atún) la ley de Gauss.

$$\begin{aligned} \frac{q}{\varepsilon_0} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{\uparrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\downarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\rightarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\downarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \int_{\rightarrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \int_{\uparrow} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= E \int da = EA \end{aligned}$$

donde A es la sección transversal de la superficie. Por lo tanto

$$EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

o bien

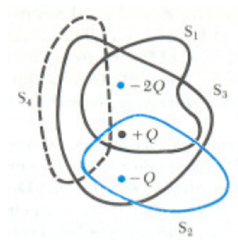
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ejercicios

1. Una espira de 40 cm de diámetro se rota en un campo eléctrico hasta encontrar la posición de máximo flujo eléctrico. El flujo eléctrico en esa posición es de $5.2 \times 10^5 Nm^2/C$. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico?

2. Dos cargas de $8\mu C$, $-5\mu C$ están dentro de un cubo cuyo lado es de 0.45 m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través del cubo? Repita el ejercicio si las mismas cargas están dentro de un cascarón esférico de radio $0.45m$.

3. Las superficies S_1, S_2, S_3, S_4, junto con las cargas $-2Q, +Q, -Q$ se distribuyen como sigue. Encuentre el flujo electrico a través de cada superficie.



4. Una pirámide cuadrada cuya base tiene de lado 6 m y de altura 4 m se coloca en un campo eléctrico vertical de 52 N/C. Calcule el flujo eléctrico total a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.

5. El campo eléctrico en cualquier punto de la superficie de una esfera hueca de radio 0.75 cm se mide y es igual a 8.90×10^2 N/C apuntando radialmente hacia afuera desde el centro de la esfera.

   (a) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la superficie esférica?

   (b) ¿Qué puede concluirse acerca de la naturaleza y distribución de la carga en el interior de la esfera?

6. Una carga de 170 μC está en el centro de un cubo de lado 80 cm. Encuentre el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo.

7. Un conductor en forma de esfera sólida de 30 cm de diámetro se carga con 5 mC.

   (a) ¿En la condición electrostática, cuál es el campo eléctrico sobre la superficie del conductor?

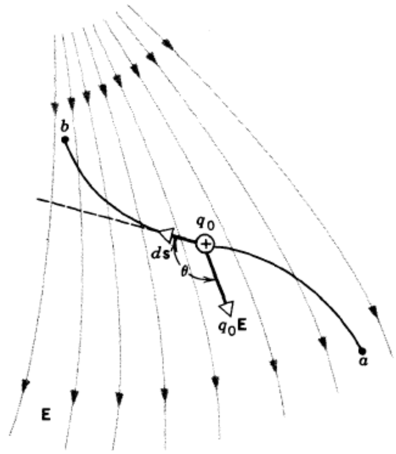
   (b) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro del conductor?

1.8 Potencial eléctrico

La diferencia de potencial eléctrico se define

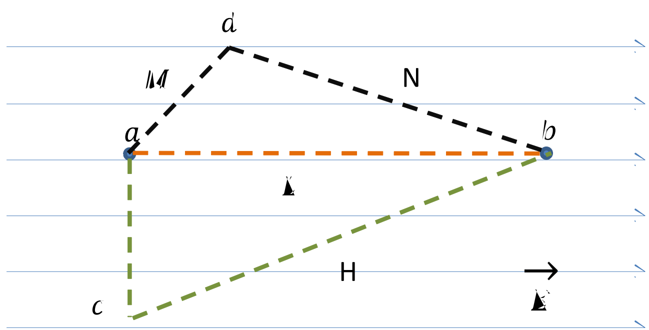
$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$$

donde V potencial eléctrico, U energía potencial, q_0 carga de prueba.



Diferencia de potencial eléctrico

Example 20 *Diferencia de potencial en un campo uniforme. Calcular el potencial a lo largo de las tres rutas: acb, adb, ab.*



Solución

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_{acb} \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} && \textit{(ruta acb)}\\
&= -\int_a^c \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} - \int_c^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}\\
&= -\int_c^b E ds\cos\theta = -\frac{EL}{H}\int_c^b ds = -EL
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_{acb} \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} && \textit{(ruta adb)}\\
&= -\int_a^d \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} - \int_d^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}\\
&= -\int_a^d E ds\cos\alpha - \int_d^b E ds\cos\beta
\end{aligned}$$

pero

$$\cos\alpha = \frac{x}{M}$$
$$\cos\beta = \frac{L-x}{N}$$

por lo cual

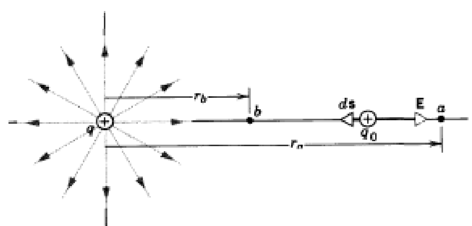
$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{Ex}{M}\int_c^b ds - \frac{E(L-x)}{N}\int_c^b ds \\ &= -Ex - E(L-x) = -EL\end{aligned}$$

finalmente

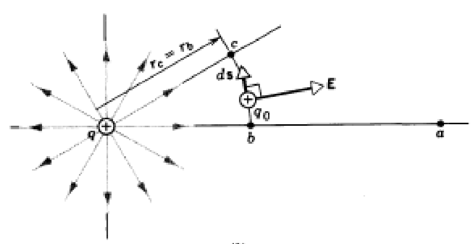
$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} \qquad \text{(ruta ab)} \\ &= -EL\end{aligned}$$

Remark 21 *La integral de línea es independiente de la ruta de integración. El campo eléctrico se dice conservativo.*

Example 22 *Potencial eléctrico debido a una carga puntual. Calcular el potencial a lo largo de las rutas: ab, ac.*



(a)

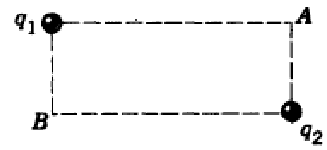


(b)

Solución

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} \\ &= -\int_{r_a}^{r_b} \frac{kq}{r^2}dr = -kq\int_{r_a}^{r_b} r^{-2}dr \\ &= \frac{kq}{r}\Big|_{r_a}^{r_b} = kq\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)\end{aligned}$$

14. En el rectángulo mostrado en la figura 28, los lados tienen una longitud de 5.0 cm y 15 cm. q_1 = −5.0 μC y q_2 = +2.0μC. (*a*) ¿Cuáles son los potenciales eléctricos en la esquina *B* y en la esquina *A*? (*b*) ¿Cuánto trabajo externo se requiere para mover a una tercera carga q_3 = +3.0 μC desde *B* hasta *A* a lo largo de una diagonal del rectángulo? (*c*) En este proceso, ¿se convierte el trabajo externo en energía potencial electrostática o viceversa? Explique.



cuando $r_a \to \infty,\ V_a = 0$*, por lo cual*

$$V = \frac{kq}{r} \qquad \text{(potencial por una carga puntal)}$$

Para una distribución de carga discreta

$$V = \sum \frac{kq_j}{r_j} \qquad \text{(potencial por una distribucion de carga discreta)}$$

Example 23 *Potencial debido a una distribución discreta de cargas.*
Solución:

$$\begin{aligned} V_A &= \sum \frac{kq_j}{r_j} \\ &= \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{(9\times10^9)(-5\times10^{-6})}{0.15} + \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-6})}{0.05} \\ &= 60000\ V \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} V_B &= \sum \frac{kq_j}{r_j} \\ &= \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{(9\times10^9)(-5\times10^{-6})}{0.05} + \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-6})}{0.15} \\ &= -7.8\times10^5\ V \end{aligned}$$

diferencia de potencial

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= 60000\ V - (-7.8\times10^5\ V) \\ &= 8.4\times10^5 V \end{aligned}$$

pero

$$\Delta U = q_3 \Delta V$$
$$= (3 \times 10^{-6} C)(8.4 \times 10^5 \ V) = 2.52 \ J$$

$(3 \times 10^{-6} C)(8.4 \times 10^5 \ V) = 2.52CV$
y

$$W = -\Delta U = -5.2 \ J$$

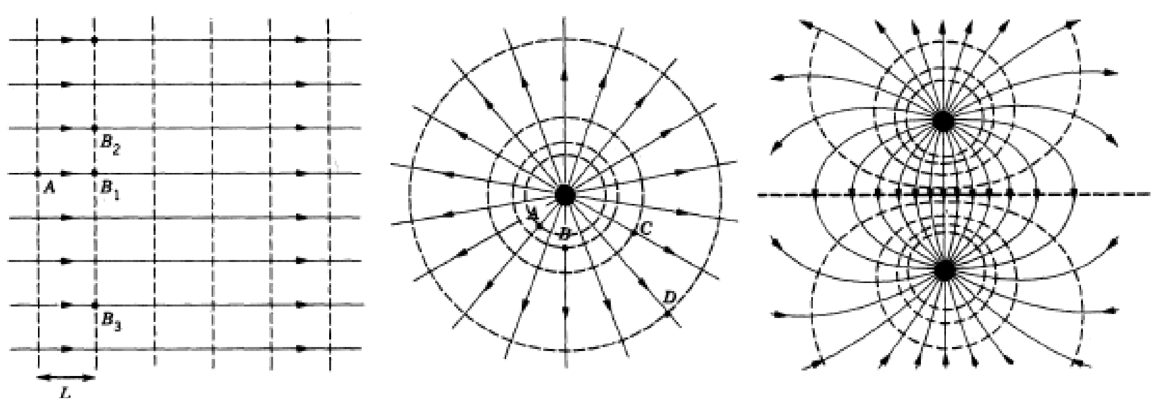
el signo negativo indica que el trabajo es por un agente externo, es decir, se realiza trabajo sobre el sistema. De forma que el trabajo eleva la energía potencial del sistema.

Example 24

15. Tres cargas de +122 mC cada una están colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero de 1.72 m de lado. Si se abastece energía a razón de 831 W, ¿cuántos días se necesitarían para mover a una de las cargas al punto medio de la línea que une a las otras dos?

Superficies equipotenciales

Superficien en que dos puntos cualesquiera tienen el mismo potencial eléctrico, es decir, $\Delta V = 0$.



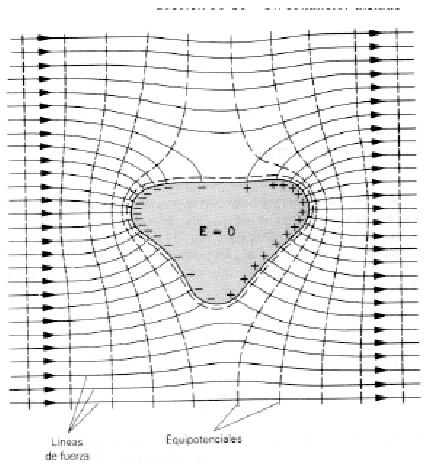
Calculo del campo eléctrico a partir del potencial

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

donde

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{(operador nabla)}$$

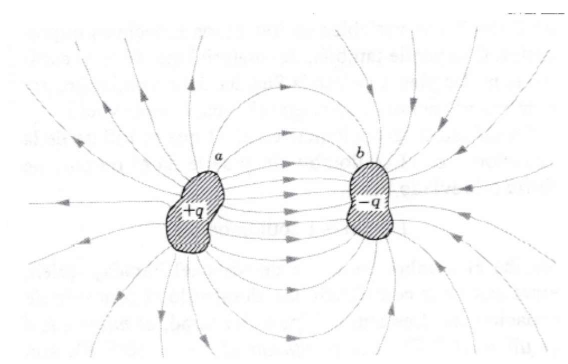
Conductor aislado



Conductor descargado inmerso en un campo eléctrico.

1.9 Capacitancia

Capacitor. Dos conductores aislados llamados placas cada uno con carga $+q$ y $-q$ conectados a las terminales de una batería.



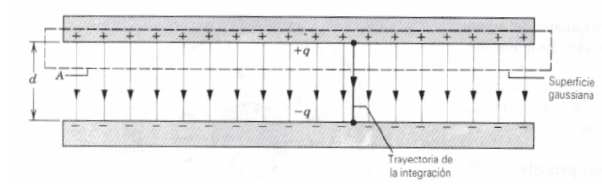
En un capacitor se observa que la carga en cada placa es proporcional a la diferencia de potencial V, es decir

$$q = CV$$

donde C se denomina capacitancia y depende de la geometría del capacitor y del medio inmerso entre las placas. La unidad para la capacitancia es

$$1\ farad = \frac{1\ coulomb}{1\ volt}$$

Capacitor de placas paralelas. Capacitor compuesto por dos láminas conductoras planas y paralelas separadas una distancia d



Considerando la superficie gaussinana mostrada arriba

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{q}{\epsilon_0 A}\end{aligned}$$

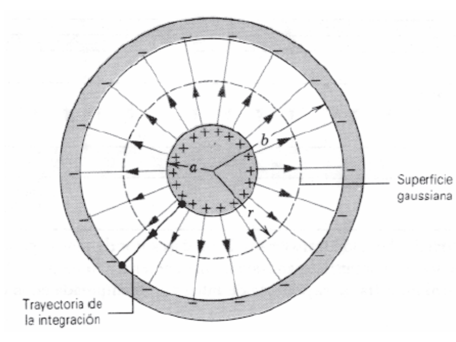
el campo en dirección normal a las placas. Luego

$$\begin{aligned}V &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \\ &= \frac{qd}{\epsilon_0 A}\end{aligned}$$

es la diferencia de potencial, siendo la trayectoria de integración paralela al campo. Por último, sustituyendo en la definición de capacitancia

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad \text{(Capacitor de placas paralelas)}$$

Capacitor cilíndrico. Capacitor compuesto por dos cilindros conductores con eje común, con radios $a < b$ y de largo L



Considerando la superficie gaussinana mostrada arriba

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L}\end{aligned}$$

el campo en dirección radial. Luego

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

es la diferencia de potencial, siendo la trayectoria de integración paralela al campo. Por último, sustituyendo en la definición de capacitancia

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} \qquad \text{(Capacitor cilindrico)}$$

Capacitor esférico. Capacitor compuesto por dos cascarones esféricos conductores concéntricos, con radios $a < b$. Considerando la superficie gaussinana esférica mostrada en el caso anterior

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

el campo en dirección radial. Luego

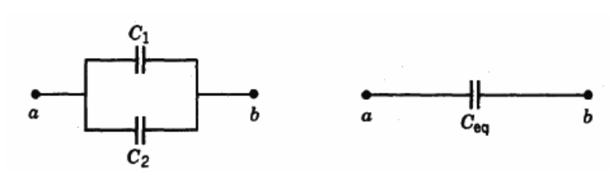
$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \end{aligned}$$

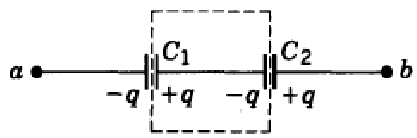
es la diferencia de potencial, siendo la trayectoria de integración paralela al campo. Por último, sustituyendo en la definición de capacitancia

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \qquad \text{(Capacitor esferico)}$$

Capacitores en paralelo

Una conexión en paralelo se caracteriza por: (1) rutas paralelas entre a y b; (2) misma diferencia de potencial en los elementos en paralelo; (3) la carga total se distribuye entre los elementos en paralelo





es decir

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V \\ q_2 &= C_2 V \\ q &= q_1 + q_2 \end{aligned}$$

La capacitancia reducida equivalente se obtiene

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \frac{q}{V} \\ &= \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{C_1 V + C_2 V}{V} \end{aligned}$$

o bien

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \qquad \text{(paralelo)}$$

Capacitores en serie

Una conexión en serie se caracteriza por: (1) una única ruta entre a y b; (2) la suma de las diferencias de potencial de los elementos en serie es igual a la diferencia de potencial de la batería; (3) misma carga de los elementos en serie es decir

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ q &= q_1 = q_2 \end{aligned}$$

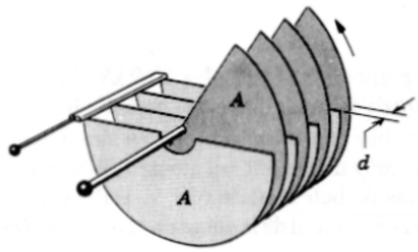
La capacitancia reducida equivalente se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{C_{eq}} \\ &= V_1 + V_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \text{(serie)}$$

Example 25 *Se muestra un capacitor variable de aire del tipo empleado para sintonizar aparatos de radio. Están conectadas entre sí placas alternadas, un grupo fijo en posición y el otro con posibilidad de rotación. Considere un grupo de n placas de polaridad alterna, cada una de ellas con un área A y separadas de las placas contiguas por una distancia d.*



Demuestre que este capacitor tiene una capacitancia máxima de

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d}$$

Solución. Las n placas con polaridad alterna $(+,-,+,...)$ configuran un arreglo en paralelo de $n-1$ capacitores idénticos de placas paralelas cada uno con capacitancia $C_0 = \epsilon_0 A/d$. Observe que el conjunto de placas fijas estan conectadas a una terminal,mientras que las placas que giran están conectadas a la otra terminal de la batería. La capacitancia en equivalente resulta

$$\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + C_2 + ... + C_{n-1} \\ &= (n-1)C_0 = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

Example 26 *Se tienen varios capacitores de $C_0 = 2\ \mu F$, cada uno capaz de soportar $V_0 = 200\ V$ sin perforarse. ¿Cómo armaría usted una combinación que tenga una capacitancia equivalente C_{eq} de a) $0.4\ \mu F$, b) $1.2\ \mu F$, siendo cada conbinación de soportar $V = 1000\ V$?*

Solución. Considere un arreglo en serie de n capacitores equivalentes C_1 compuesto cada uno de n capacitores C_0 en paralelo. De esta forma

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + ... + \frac{1}{C_1}} = \frac{1}{\frac{n}{C_1}} \\ &= \frac{m}{n} C_0 \end{aligned}$$

La diferencia de potencial

$$V = nV_0$$

resolviendo ésta última

$$n = \frac{V}{V_0} = \frac{1000\ V}{200\ V} = 5$$

sustituyendo en la primera

$$m = n\frac{C_{eq}}{C_0}$$

resultando $m = 1, 3$ respectivamente para los incisos a), b).

Energía de un campo electrostático

Suponga que se transfiere una carga dq' de una placa a otra de un capacitor a costa de una diferencia de potencial V'. El cambio en la energía potencial1

$$\begin{aligned} dU &= V'dq' \\ &= \frac{q'}{C}dq' \end{aligned}$$

al sumar las contribuciones y cargarlo totalmente

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}Cq^2 \qquad \text{(energia de un capacitor)} \\ &= \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned}$$

la energía por unidad de volumen de un capacitor de placas paralelas

$$u = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0(\frac{V}{d})^2$$

pero la diferencia de potencial entre placas paralelas es $V = Ed$, por lo que

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{(densidad de energ■a (vacio))}$$

resultado válido en general para cualquier campo eléctrico en el vacío.

Capacitores con dieléctricos

Dieléctricos

Corriente eléctrica

Resistencia y conductividad

Ley de Ohm

Resistencias en serie y paralelo

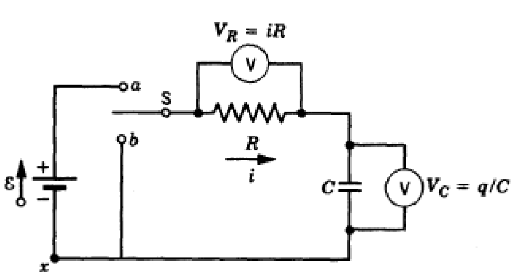
Circuitos de corriente contínua

Leyes de Kirchoff

Circuitos RC

1.10 Carga de un capacitor

Considere el circuito RC con el capacitor inicialmente descargado y moviendo el switch en a.



Por la segunda ley de Kirchhoff

$$V_0 - iR - \frac{q}{C} = 0$$

donde V_0 es la fem de la batería, R resistencia y C la capacitancia del condensador. Reescribiendo

$$\frac{dq}{q - V_0C} = -\frac{dt}{RC}$$

integrando

$$\ln(q - V_0C) = -\frac{t}{\tau} + const$$

donde $\tau = RC$ es la *constante capacitiva*. Aplicando la condición de frontera $q(0) = 0$ (condensador descargado en $t = 0$)

$$q(t) = V_0C(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \text{(carga)}$$

En el caso límite

$$q(t \to \infty) = V_0C \qquad \text{(carga maxima)}$$

para el 63% de la carga máxima

$$q(\tau) = 0.63V_0C$$

Observe que a medida que $\tau \to 0$, el proceso de carga del capacitor es más rápido. Para la corriente

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(corriente)}$$

1.11 Descarga de un capacitor

Considerando el circuito RC con el capacitor cargado y moviendo el switch en b, por la segunda ley de Kirchhoff

$$iR + \frac{q}{C} = 0$$

reescribiendo

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}$$

integrando y aplicando la condición de frontera $q(0) = V_0C$ (en $t = 0$ la carga es máxima)

$$q(t) = V_0Ce^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(descarga)}$$

Observe que a medida que $\tau \to \infty$, el proceso de descarga del capacitor es más lento. Para la corriente

$$i(t) = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(corriente)}$$

donde el signo menos indica que la corriente de descarga va en dirección opuesta a la corriente durante el proceso de carga.

Example 27 *Considere un circuito con un condensador de* $50\ \mu F$ *y resistencia de* $100\ k\Omega$ *conectados a una batería de* $12\ V$*. Grafique y analice* $q-t,\ i-t,\ V-t$ *(voltaje en el capacitor contra tiempo.) Una vez cargado el condensador, el circuito se descarga a través de una resistencia de* $500\ k\Omega$*. Describa el proceso de descarga graficando* $q-t,\ i-t,\ V-t$.

Solución:

Carga de Capacitor. Constante capacitiva

$$\tau = RC = 5\ seg$$

voltaje (en volts)

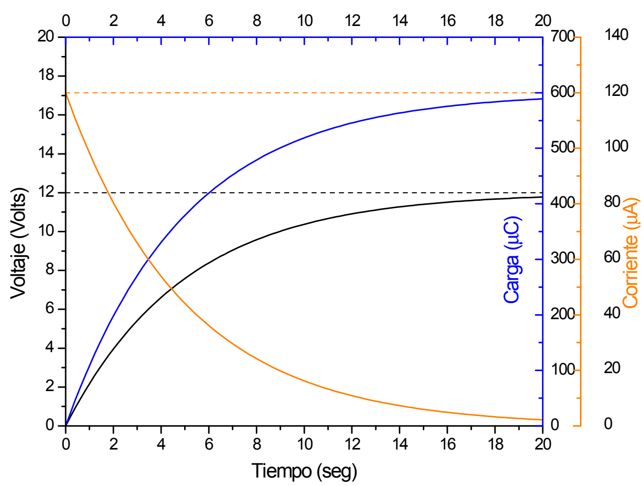
$$V(t) = 12(1 - e^{-\frac{t}{5}})$$

carga (en microcoulombs)

$$q(t) = 600(1 - e^{-\frac{t}{5}})$$

corriente (en microamperes)

$$i(t) = 120e^{-\frac{t}{5}}$$



Carga de capacitor (circuito RC) $\tau = 5\ seg$

Descarga de Capacitor. Constante capacitiva

$$\tau = RC = 25\ seg$$

voltaje (en volts)

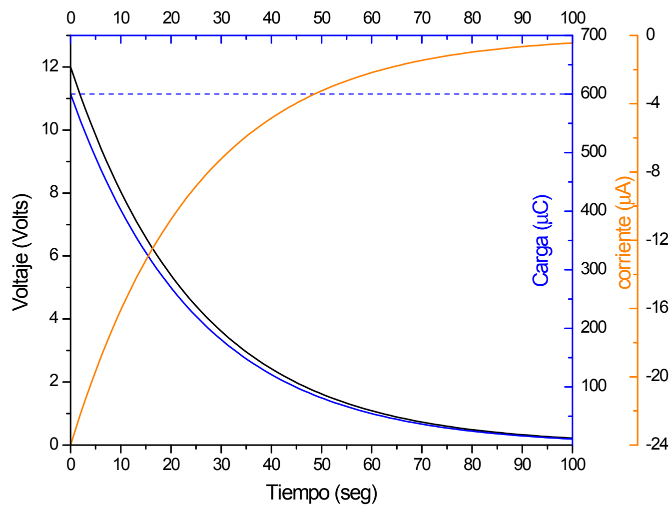
$$V(t) = 12e^{-\frac{t}{25}}$$

carga (en microcoulombs)

$$q(t) = 600e^{-\frac{t}{25}}$$

corriente (en microamperes)

$$i(t) = -24e^{-\frac{t}{25}}$$



Descarga capacitor $\tau = 25$ *seg*